

مبادىء رياضيات الحاسب

تأليف
أ.د. علي نصر السيد الوكيل
وكيل معهد العبور العالي للإدارة والحاسبات ونظم المعلومات

الدار الدولية للاستثمارات الثقافية

مبـــادئ

رياضيات الحاسب

تأليف

أ. د. على نصر السيد الوكيل

وكيل معهد العبور العالى للإدارة والحاسبات ونظم المعلومات

الدار الدولية للاستثمارات الثقافية

القاهرة - مصر

الطبعة الأولى

2000م

مبادئ رياضيات الحاسب

تأليف

أ. د. على نصر السيد الوكيل

رقم الإيـــداع

2000/4221
I.S.B.N 977-282-082-x

للدار الدولية للاستثمارات الثقافية ش.م.م
8 ابراهيم العرابى- النزهة الجديدة مصر الجديدة القاهرة ج.م.ع.
ص.ب: 5599 هليوبوليس غرب/ القاهرة تليفون: 2972344 / 2957655 فاكس:2957655 (00202)

مقدمة الطبعة الأولى

إن الحاسب الإلكترونى الذى أصبح لا يستغنى عنه أحد فى عصر المعلومات قد أفاد – ربما أكثر من غيره من المخترعات – من الرياضيات المعاصرة: فدوائره المنطقية فى معالجه المركزى الذى هو بمثابة مخ الحاسب تعتمد أساسا على المنطق الرياضى ونظرية المجموعات، والشفرة التى عن طريقها يتعرف الحاسب على الحروف والأرقام والرموز تعتمد على النظام الثنائى للأعداد. أما مزاياه الفريدة فى البحث عن الأشكال والأنماط وتعديلها واستنساخها واكتشاف الأخطاء فى الأجهزة والبرمجيات فأساسها العلاقات والرواسم والأنظمة الرياضية ذات العمليات.

لذا فإن أراد الدارس لعلوم الحاسب تفهم ما يجرى بتلك الآله العجيبة ولا يكون مجرد مستفيد من إمكاناتها التقنية العالية فلا غنى له عن دراسة تلك الموضوعات. ومن يعلم فربما قادته تلك الدراسة إلى تطوير وتعظيم تلك الإمكانات.

وإنى إذ أقدم هذا المؤلف المتواضع أرجو أن أكون قد ساهمت فى تبسيط المادة العلمية بدون إخلال بمحتواها حتى تحقق الفائدة المرجوة منها والله الموفق وهو المستعان،،

المؤلف

أ.د. على نصر السيد الوكيل

يناير عام ٢٠٠٠

الباب الأول

المجموعات

SETS

الباب الثاني

مقدمة في المنطق الرياضي

AN INTRODUCTION TO MATHEMATICAL LOGIC

الباب الثالث

نظرية المفاتيح

SWITCHING THEORY

الباب الرابع

بعض نظم العد

SOME COMPUTING SYSTEMS

تابع الباب الرابع

الباب الخامس

العـــلاقات

RELATIONS

تابع الباب الخامس

الباب السادس

الرواسم

MAPPINGS

الباب السابع

الزمرة وكود التعويض

GROUPS AND SUBSTITUTION CODES

الباب الأول
المجموعات
SETS

١ – ١ مقدمة

يرجع الفضل فى نشأة نظرية المجمـــــوعات إلى العالم الألمانى جورج كانتور (١٨٤٥ – ١٩١٨). وقد قادت بحوث كـــــانتور فى المتسلســـلات المثلثيـــة والمتسلسلات الحقيقية والحاجة إلى مقارنة حجوم المجموعات المختلفة إلى وضع أسس نظرية المجموعات. وجدير بالذكر أن أفكار كانتور قوبلت بادىء الأمر بالرفض من معاصريه من علماء الرياضيات ، ولكن نجـــــاح نظريتـــه فى إيجاد برهـــــان على وجـــــود الأعداد المسترســــلة (مثـــل π ، e ، ...) وكذلك وجود تطبيقات للنظرية فى الهندسة والتحليل الرياضى أدّت إلى قبول أفكار كانتور، و لم يمض عام ١٨٩٠ حتى أصبحت نظرية المجموعات فرعــــا معترفا به من فروع الرياضيات.

١ – ٢ مفهوم المجموعة Concept of a Set

يمكن أن يقال لتجمُّع من الأشياء من نوع واحد أو من أنواع مختلفة أنه يكوِّن مجموعة *set* إذا استطعنا أن نحدد ما إذا كان شيء ما ينتمى إلى *belongs to* أو لا ينتمى إلى *does not belong to* هذه المجموعة. وإذا انتمى الشــــيء إلى المجموعة فإنه يسمى عنصرا من عناصر المجموعة *element of the set* ؛

فمثلا:

(أ) الأعداد الطبيعية تكوِّن مجموعة وتُكتب $N = \{1,2,3,...\}$.

(ب) { القلم الذى تكتب به، الكتاب الذى بين يديك، المنضدة التى أمامك، بـــاب حجرة الدراسة} هى مجموعة.

(ج) الأعداد الحقيقية الـــتى تنحصـــر بـــين ٠، ١ تكـــوّن مجموعـــة وتكتـــب $\{x : 0 < x < 1\}$.

(د) طلاب الجامعة الذين تتجاوز أعمارهم ٢٠ سنة يكوّنون مجموعة.

(هــ) طلاب الجامعة الذين تقل أعمارهم عن ١٢ سنة يكوّنون مجموعة! (لعلـــك لاحظت أن هذه المجموعة لا تحتوى على أى عنصر).

أما إذا قلنا :

(و) "الألوان المائلة للون الاحمر" فإن هذه ليست بمجموعة حيث أن تحديد اللون هنا مسألة تقديرية. ويجب بدلا من ذلك أن نقول "الألوان التى يزيد طول موجتها عن ٤٠٠٠ أنجشتروم" مثلا، فهذه تكوّن مجموعة.

(ز) "الطلاب طوال القامة" لا يكوّنون مجموعة حيث أننا لم نحدد الطول الذى إذا تعداه الشخص يعتبر طويل القامة. ويجب بدلا من ذلك أن نقول الطـــلاب الذين يزيد طول قامتهم عن ١٧٠ سنتيمتر مثلا، فهؤلاء يكوّنون مجموعة.

سنرمز للمجموعات بالرموز ... ,A , B, C ؛ أما الأشياء التى تحتويها المجموعة (أى العناصر) فسنستعمل لهـــا الرموز ... ,a , b , c وإذا كان العنصر a مثلا ينتمى إلى المجموعة A فإننا نكتب $a \in A$ ، أما إذا كان العنصر a لا ينتمى إلى المجموعة A فإننا نكتب $a \notin A$.

١ – ٣ تمثيل المجموعات Representation of Sets

توجد طريقتان لتمثيل المجموعات وهما:

طريقة الحصر *Tabulation Method*

وفيها نحصر كل عناصر المجموعة (أو عددا كافيا منها يمثلها) بين القوسين { } كما فى المثالين (أ) ، (ب).

طريقة القاعدة *Rule Method*

وفيها نضع رمزا مثل x يمثل عناصر المجموعة ثم نكتب القاعدة التى تتبعها جميع عناصر المجموعة كما فى المثال (ج).

وجدير بالذكر أن بعض المجموعات تقبل التمثيل بطريقة دون الأخرى وبعضها يقبل التمثيل بالطريقتين معا؛ فالمثال (ب) لا يقبل التمثيل إلا بطريقة الحصر فى حين أن المثال (ج) لا يقبل التمثيل إلا بطريقة القاعدة، أما المثال التالى فيقبـــل التمثيـــل بالطريقتين معا:

مثال

مثّل مجموعة الأعداد الطبيعية A المحصورة بين 3 ، 11 بطريقتين.

الحل

$$A = \{x : x \in N \ , 3 < x < 11\} = \{4,5,6,7,8,9,10\}$$

١ – ٤ المجموعات الجزئية Subsets

يقال لمجموعة ما A أنها مجموعة جزئية من المجموعة B إذا كان أى عنصر من عناصر A هو أيضا عنصر من عناصر B ، وعندئذ نكتب $A \subset B$. أى أن:

$$A \subset B \Leftrightarrow [a \in A \Rightarrow a \in B]^{(*)}$$

(*) الرمز $\Leftrightarrow$ يعنى "إذا، وفقط إذا" ؛ والرمز $\Rightarrow$ يعنى "يؤدى إلى" وسندرسهما تفصيليا فى باب المنطق الرياضى

مثال (١)

لتكن $A = \{1,3,7\}$ ، $B = \{1,2,3,5,7\}$ ، $C = \{1,2,3,6\}$. فإن A مجموعة جزئية من B حيث أن جميع عناصر A تنتمى أيضا إلى B ، وبالمثل فإن مجموعة جزئية من B، ولكن A ليست مجموعة جزئية من C لوجود العنصر 7 فى B وهو لا ينتمى إلى C.

مثال (٢)

لتكن A هى مجموعة طلاب كلية ما، ولتكن B هى مجموعة طلاب الكلية المشتركين فى أنشطة رياضية. وحيث أن كل طالب فى نشاط رياضى هو أصلا طالب بالكلية، فإن B هى مجموعة جزئية من A . وإذا وجد طالب واحد بالكلية غير مشترك فى أنشطة رياضية قيل أن B مجموعة جزئية فعلية *proper subset* من A؛ أما إذا كان جميع طلاب الكلية مشتركين فى أنشطة رياضية فإن B تكون مجموعة جزئية غير فعلية *improper subset* من A (لاحظ فى هذه الحالة أن المجموعة B هى نفسها A).

١–٥ تساوى المجموعات Equality of Sets

يقال أن المجموعة A تساوى المجموعة B إذا وفقط إذا كان كل عنصر من عناصر A ينتمى إلى B وكل عنصر من عناصر B ينتمى إلى A. أى أن:

$$[A = B] \Leftrightarrow [A \subset B \ \& \ B \subset A]$$

مثال

$$\{a, e, i, o, u\} = \{i, u, a, o, e\}$$

١-٦ المجموعة الخالية The Empty Set

المجموعة الخالية هى المجموعة التى لا تحتوى على أى عنصر ويرمز لها بالرمز ϕ وهى بالنسبة لجبر المجموعات بمثابة الصفر من الأعداد.

مثال (١)

مجموعة الأعداد الفردية التى تقبل القسمة على ٢ هى مجموعة خالية.

مثال (٢)

مجموعة طلاب الجامعة تحت سن ١٢ سنة هى مجموعة خالية.

نظريـــة

المجموعة الخالية هى مجموعة جزئية من أى مجموعة إختيارية A.

البرهان

لنفرض العكس هو الصحيح، أى لنفرض أن ϕ ليست مجموعة جزئية من A . إذن يوجد عنصر واحد على الأقل ينتمى إلى ϕ ولا ينتمى إلى A .ولكن هـــذا غير صحيح حيث أن ϕ لا تحتوى على أى عنصر. إذن الفرض غير صحيح، وتكون ϕ مجموعة جزئية من A.

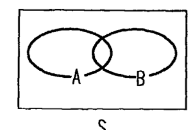
١-٧ المجموعة الشاملة The Univesal Set

المجموعة الشاملة هى المجموعة التى تحتوى أية مجموعـــة أخـــرى كمجموعـــة جزئية. وهذه المجموعة قد تتغير بتغير موضوع المناقشة؛ فمثـــلا إذا أردنـــا أن نتكلم عن كليات جامعة معينة فان الجامعة تعتبر هى المجوعة الشاملة فى حـــين تعتبر الكليات مجموعات جزئية؛ فمثلا الكليات النظرية مجموعة، والكليـــات العملية مجموعة أخرى والكليات التى يزيد طلابها عن عدد معـــين مجموعـــة

ثالثة.. وهكذا. وإذا أردنا أن نتكلم عن الأعداد الفردية، والأعداد الزوجية، والأعداد الأولية، والأعداد التى تقبل القسمة على عدد معين ،... فإن المجموعة الشاملة هنا هى مجموعة الأعداد الطبيعية {...,1,2,3} = N. هذا، ويرمز عادة للمجموعة الشاملة بالرمز S.

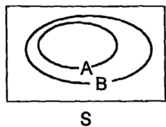
١-٨ أشكال فن Venn Diagrams

تستخدم أشكال فن فى تصوُّر كثير من المجموعات والعلاقات الجبرية التى تربط بينها. وفى هذه الأشكال تمثّل المجموعة الشاملة S بمستطيل وتمثّل أى مجموعة جزئية منها بشكل مغلق داخل هذا المستطيل (أنظر شكل ١-١).



شكل ١-١

فإذا أردنا مثلا أن نمثل العلاقة $A \subset B$ فإننا نمثلها بالشكل ١-٢ (لاحظ من الشكل أن المجموعة B ليست مجموعة جزئية من المجموعة A ($B \not\subset A$).



شكل ١-٢

١-٩ العمليات الجبرية على المجموعات Operations on Sets

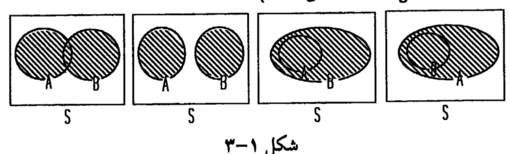
نستطيع أن نعرّف مجموعات مركبة من أخرى بسيطة بواسطة العمليات الآتية:

١-٩-١ الإتحاد The Union

إتحاد مجموعتين A ، B هو مجموعة عناصرها تنتمى إلى A أو إلى B أو كليهما ويرمز له بالرمز $A \cup B$. أى أن:

$$A \cup B = \{x : x \in A \ \text{أو} \ x \in B\}$$

حيث تفيد " أو" أن x تنتمى إلى A أو B أو كليهما. (أنظر شكل ١-٣ حيث يمثّل الاتحاد بالمناطق المظلّلة).



شكل ١-٣

مثال (١)

لتكن $A = \{1,2,5,7\}$ ولتكن $B = \{1,5,6,8\}$. إذن:

$$A \cup B = \{1,2,5,7\} \cup \{1,5,6,8\} = \{1,2,5,6,7,8\}$$

(لاحظ أن عدد عناصر A يساوى 4 وعدد عناصر B يساوى 4 ولكن عدد عناصر $A \cup B$ يساوى 6 وليس 8 ! لماذا ؟).

مثال (٢)

لتكن A هى مجموعة الأعداد المحصورة بين ١ ، ٢٠ التى تقبل القسمة على ٢ ولتكن B هى مجموعة الأعداد المحصورة بين ١ ، ٢٠ التى تقبل القسمة

على ٣. أكتب مجموعة الأعداد المحصورة بين ١ ، ٢٠ التى تقبل القسمة على ٢ أو ٣.

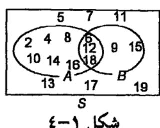
الحـــل

$$A=\{2,4,6,8,10,12,14,16,18\} \quad , \quad B=\{3,6,9,12,15,18\}$$

مجموعة الأعداد المحصورة بين 1 ، 20 التى تقبل القسمة على 2 أو 3 هى:

$$A\cup B=\{2,3,4,6,8,9,10,12,14,15,16,18\}$$

(أنظر شكل ١-٤).



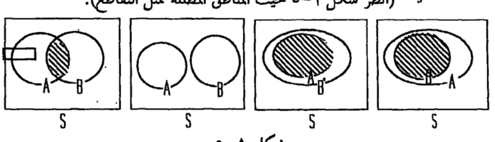
شكل ١-٤

١-٩-٢ التقاطع The Intersection

تقاطع مجموعتين A ، B هو مجموعة عناصرها تنتمى إلى كل من المجموعتين A ، B. ويرمز لهذه المجموعة بالرمز $A\cap B$. أى أن:

$$A\cap B=\{x : x\in A , x\in B\}$$

وإذا كان $A\cap B$ هو المجموعة الخالية قيل أن المجموعتين A ، B متباعدتـــان disjoint (أنظر شكل ١-٥ حيث المناطق المظللة تمثل التقاطع).



شكل ١-٥

مثال (١)

لتكن $A = \{1,2,5,7\}$ ولتكن $B = \{1,5,6,8\}$ ، فإن:

$$A \cap B = \{1,2,5,7\} \cap \{1,5,6,8\} = \{1,5\}$$

مثال (٢)

لتكن $A = \{1,3,5,\dots\}$ هى مجموعة الأعداد الفردية، ولتكن $B = \{2,4,6,\dots\}$ هى مجموعة الأعداد الزوجية. فإن:

$$A \cap B = \phi$$

أى أن المجموعتين A ، B متباعدتان (لاحظ أنه لا يوجد عدد فردى وزوجى فى آن واحد).

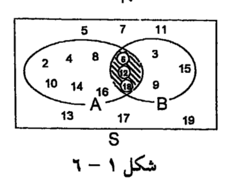
مثال (٣)

لتكن S هى مجموعة الأعداد الطبيعية المحصورة بين 1 ، 20 ؛ ولتكن A هى مجموعة الأعداد الطبيعية المحصورة بين 1 ، 20 التى تقبل القسمه على 2 ، B هى مجموعة الأعداد الطبيعية المحصورة بين 1 ، 20 التى تقبل القسمة على 3. أوجد $A \cap B$ ومثّل هذه المجموعات على شكل فن.

الحل

$$A \cap B = \{2,4,6,8,10,12,14,16,18\} \cap \{3,6,9,12,15,18\} = \{6,12,18\}$$

ويبين شكل(١ - ٦) هذه المجموعات حيث تمثّل المنطقة المظللة $A \cap B$.



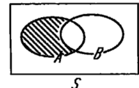
شكل ١ – ٦

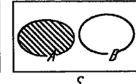
١–٩–٣ الفرق The Difference

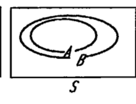
الفرق A – B هو مجموعة العناصر التى تنتمى إلى A ولا تنتمى إلى B. أى:

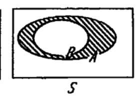
$$A-B=\{x:x\in A\ ,\ x\notin B\}$$

ويوضح شكل ١–٧ بعض الحالات المختلفة لمجموعة الفرق حيث تمثل المناطق المظللة المجموعة A–B.









شكل ١–٧

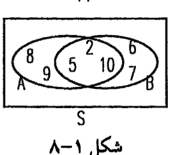
لاحظ أن A – B لا يساوى B – A.

مثال (١)

إذا كانت A = {2,5,6,7,10} ، B = {2,5,8,9,10} ، فإن:

$$A-B=\{6,7\}\ ,\ B-A=\{8,9\}$$

ويتبين ذلك من شكل ١–٨.



شكل ١-٨

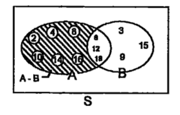
مثال (٢)

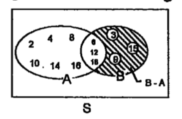
لتكن S هى مجموعة الأعداد الطبيعية المحصورة بين ١ ، ٢٠ ولتكن A هـــى مجموعة الأعداد الطبيعية المحصورة بين ١ ، ٢٠ التى تقبل القسمه علـــى ٢، B هى مجموعة الأعداد الطبيعية المحصورة بين ١ ، ٢٠ التى تقبل القسمة على ٣. أوجـــــد كـــلا من A – B ، B – A ومثل هذه االمجموعات على شكل فن.

الحــــل

$$A - B = \{2,4,8,10,14,16\}\ ,\ B - A = \{3,9,15\}$$

شكل ١ – ٩ يبين هاتين المجموعتين.





شكل ١ – ٩

ويتضح من الشكل أن مجموعة الأعداد التى تقبل القسمة علـــى 2 ولا تقبـــل القسمة على 3 هى:

$$A - B = \{2,4,8,10,14,16,20\}$$

ومجموعة الأعداد التى تقبل القسمة على 3 ولا تقبل القسمة على 2 هى:

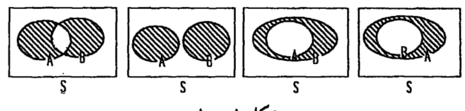
$B - A = \{3,9,15\}$

٩ - ٤ الفرق المتماثل Symmetric Difference

الفرق المتماثل $A \Delta B$ هو المجموعة التى تحتوى كل العناصر التى تنتمـــى إلى المجموعة A ولا تنتمى إلى B بالإضافة إلى كل العناصر التى تنتمى B ولا تنتمى إلى A. أى أن:

$$A\Delta B = \{x:(x \in A, x \notin B) \text{ أو } (x \in B, x \notin A)\}$$

ويبين شكل ١-١٠ الحالات المختلفة لمجموعة الفرق المتمـــاثل حيـــث يمثـــل بالمناطق المظللة:



شكل ١-١٠

ويتضح من الشكل أن:

$$A \Delta B = B \Delta A$$

وأن:

$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$$

كما سنثبت ذلك فيما بعد.

مثال ١

إذا كانت $A = \{2,5,6,7,10\}$ ، $B = \{2,5,8,9,10\}$ ، أوجد $A\Delta B$.

الحـــل

$$A \Delta B = \{6,7,8,9\}$$

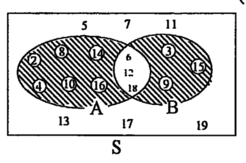
مثال (٢)

لتكن S هى مجموعة الأعداد الطبيعية المحصورة بين 1 ، 20 ولتكن A هى مجموعة الأعداد الطبيعية المحصورة بين 1 ، 20 التى تقبل القسمة على 3. أوجد مجموعة الفرق المتماثل A Δ B ومثلها على شكل فن.

الحـــل

$$A\Delta B=\{2,3,4,8,9,10,14,15,16\}$$

وهذه المجموعة هى مجموعة الأعداد الطبيعية المحصورة بين١، ٢٠ ولتكن A هى مجموعة الأعداد الطبيعية المحصورة بين 1 ، 20 التى تقبل القسمة علـــى 2 ولا تقبل القسمة على 3 أو تقبل القسمة على 3 ولا تقبل القسمة على 2 (أنظـــر شكل ١-١١).



شكل ١-١١

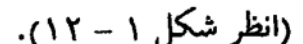
١-٩-٥ المكملة The Complement

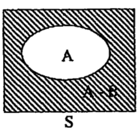
المجموعة المكملة A' لأى مجموعة A هى المجموعة التى تحتوى جميـــع عنـــاصر المجموعة الشاملة التى لا تنتمى إلى A. أى أن:

$$A'=\{x: x\in S\ ,\ x\notin A\}$$

حيث S المجموعة الشاملة. أى أن:

$$A'=S-A$$


(انظر شكل ١ – ١٢).



S

شكل ١ – ١٢

مثال (١)

لتكن S هى مجموعة الحروف الإنجليزية ولتكن A مجموعة الحروف المتحركة. أى:

$$A = \{a, e, i, o, u\}$$

فإن المجموعة المكملة هى مجموعة الحروف الساكنة:

$$A' = S - A = \{b, c, d, f, g, h, j, k, l, m, n, p, q, r, s, t, v, w, x, y, z\}$$

مثال (٢)

إذا كانت S هى مجموعة الأعداد المحصورة بين 1 ، 20 وكانت A هى مجموعة الأعداد المحصورة بين 1 ، 20 التى تقبل القسمة على 2 فإن:

$$A' = \{3,5,7,9,11,13,15,17,19\}$$

تمثل مجموعة الأعداد المحصورة بين 1 ، 20 التى لا تقبل القسمة على 2. وإذا كانتB هى مجموعة الأعداد المحصورة بين 1 ، 20 التى تقبل القسمة على 3 فإن:

$$B' = \{2,4,5,7,8,10,11,13,14,16,17,19\}$$

تمثل مجموعة الأعداد المحصورة بين 1 ، 20 التى لا تقبل القسمة على 3.

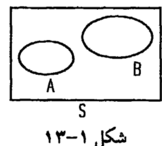
١-١٠ عدد عناصر مجموعة Number of Elements in a Set

إذا كانت المجموعة A تحتوى عددا محدودا من العناصر فان عدد هذه العناصر يرمز له بالرمز #(A) ؛ وتوجد قواعد تساعد فى معرفـــة عـــدد عنـــاصر المجموعات المركبة وهى:

(أ) إذا كانت A ، B متباعدتين فإن:

$$\#(A \cup B) = \#(A)+\#(B)$$

(انظر شكل ١-١٣).

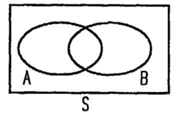


شكل ١-١٣

(ب) إذا كانت A ، B متقاطعتين فإن:

$$\#(A \cup B)=\#(A)+\#(B)-\#(A \cap B)$$

(انظر شكل ١-١٤).



شكل ١-١٤

يتضح من شكل ١-١٤ أننا إذا أخذنا $\#(A) + \#(B)$ فإننا نكون قد حسبنا عدد العناصر فى المنطقة التى تمثل $A \cap B$ مرتين.لذا يجب أن

نطرح $\#(A \cap B)$.

مثال(١)

لدينا فصل من الطلاب منهم ٣٠ يدرسون اللغة الانجليزية كلغة أجنبية أولى ، ١٢ يدرسون اللغه الفرنسية كلغه أجنبيه أولى. كم طالبا فى هذا الفصل إذا علمت أن اللغات الأجنبية الأولى المتاحة فى المدرسة هى الإنجليزية والألمانية فقط، وأن كل طالب يدرس لغة أجنبية واحدة؟

الحل

لتكن E هى مجموعة الطلاب الذين يدرسون الانجليزية كلغة أجنبية أولى، F مجموعة الطلاب الذين يدرسون الفرنسية كلغة اجنبية أولى. إذن $\#(E) = 30$، $\#(F) = 12$.

وحيث أن $E \cap F = \phi$ ، إذن عدد طلاب الفصل هو:

$$\#(E \cup F) = \#(E) + \#(F) = 30 + 12 = 42$$

مثال (٢)

فى مكتب للترجمة وجد أن عدد الذين يجيدون الترجمة للانجليزية على الأقل يساوى ٩، وعدد الذين يجيدون الترجمة للفرنسية على الأقل يساوى ٦. فإذا كان العدد الكلى للمترجمين يساوى ١٢، أوجد عدد الذين يجيدون الترجمة للغتين معا وعدد الذين يجيدون الترجمة للانجليزية فقط وعدد الذين يجيدون الترجمة للفرنسية فقط.

الحـــــل

لتكن E مجموعة الذين يجيدون الترجمة للغة الانجليزيـــة ، F مجموعـــة الذيـــن يجيدون الترجمة للغة الفرنسية . إذن عدد الذين يجيدون الترجمة للغتين معا هو:

$$\#(E \cap F) = \#(E) + \#(F) - \#(E \cup F) = 9 + 6 - 12 = 3$$

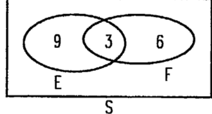
وعدد المترجمين للغة الانجليزية فقط هو:

$$\#(E - F) = \#(E) - \#(E \cap F) = 9 - 3 = 6$$

وعدد المترجمين للغة الفرنسية فقط هو:

$$\#(F - E) = \#(F) - \#(E \cap F) = 6 - 3 = 3$$

(أنظر شكل ١-١٥).

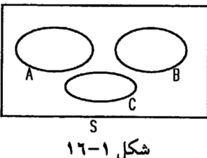


شكل ١-١٥

(ج) إذا كانت A ، B ، C متباعدة مثنى مثنى فإن:

$$\#(A \cup B \cup C) = \#(A) + \#(B) + \#(C)$$

(أنظر شكل ١-١٦).

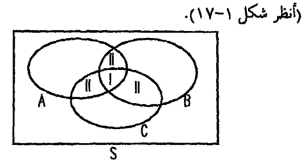


شكل ١-١٦

(د) إذا كانت A ، B ، C متقاطعة فإن:

$$\#(A\cup B\cup C) = \#(A) + \#(B) + \#(C)$$
$$- \#(A\cap B) - \#(B\cap C) - \#(A\cap C) + \#(A\cap B\cap C)$$

(أنظر شكل ١-١٧).



شكل ١-١٧

من الشكل يتضح أننا إذا أخذنا $\#(A) + \#(B) + \#(C)$ فإننا نكـــون قـــد حسبنا عدد العناصر فى المناطق II مرتين، وعدد العناصر فى المنطقة I التى تمثل $A \cap B \cap C$ ثلاث مرات. فإذا طرحنا $\#(A\cap B) + \#(B\cap C) + \#(A\cap C)$ فإننا نكون قد حسبنا عدد العناصر فى كل منطقة مرة واحـــدة وشطبنـــا عدد العناصر فى المنطقة I التى تمثل $A \cap B \cap C$. لذا يجـــب أن نضيـــف العـــدد $\#(A \cap B \cap C)$.

مثال (٣)

فى مكتب للترجمة وجد أن عدد المترجمين الذين يجيدون الترجمة للغة الإنجليزية على الأقل يساوى ٣٠، وعدد المترجمين الذين يجيدون الترجمة للغة الألمانيـــه على الأقل يساوى ٢٠، وعدد المترجمين الذين يجيدون الترجمة للغة الفرنســـية على الأقل يساوى ٢٥. فإذا علمت أن عدد المترجمين الذين يجيدون الترجمـــة للغتين الإنجليزية والألمانية على الأقل يساوى ٨، وعدد المترجمين الذين يجيدون

الترجمة للغتين الألمانية والفرنسية على الأقل يساوى ٦، وعدد المترجمين الذين يجيدون الترجمة للغتين الإنجليزية والفرنسية على الأقل يساوى ١٠، عدد الذين يجيدون الترجمة للغات الثلاث يساوى ٥؛ فما هو العدد الكلى للمترجمين ؟ وعدد المترجمين الذين يجيدون الترجمة للغة واحدة فقط ؟ وعدد المترجمين الذين يجيدون الترجمة للغتين دون الثالثة؟

الحـــل

نفرض أن مجموعة المترجمين الذين يجيدون الترجمة للغة الإنجليزية على الأقل هى E ومجموعةالمترجمين الذين يجيدون الترجمة للغة الألمانية على الأقل هى G ومجموعة المترجمين الذين يجيدون الترجمة للغة الفرنسية على الأقل هى F.

$$\therefore \quad \#(E) = 30 \text{،} \#(G) = 20 \text{،} \#(F) = 25$$

$$\text{،} \#(G \cap F) = 6 \text{،} \#(E \cap F) = 10 \text{،} \#(E \cap G) = 8 \text{،} \#(E \cap G \cap F) = 5.$$

إذن العدد الكلى للمترجمين هو:

$$\#(E \cup G \cup F) = 30 + 20 + 25 - 8 - 10 - 6 + 5 = 56$$

وعدد المترجمين الذين يجيدون الترجمة للغتين الإنجليزية والألمانية دون الفرنسية هو:

$$\#(E \cap G) - \#(E \cap G \cap F) = 8 - 5 = 3$$

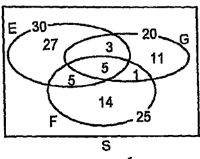
وعدد المترجمين الذين يجيدون الترجمة للغتين الإنجليزية والفرنسية دون الألمانية هو:

$$\#(E \cap F) - \#(E \cap G \cap F) = 10 - 5 = 5$$

وعدد المترجمين الذين يجيدون الترجمة للغتين الألمانية والفرنسية دون الإنجليزية هو:

$$\#(G \cap F) - \#(E \cap G \cap F) = 6 - 5 = 1$$

(أنظر شكل ١-١٨).



شكل ١-١٨

من الشكل يتضح أن عدد المترجمين الذين يجيدون الترجمة للغة الإنجليزية فقط هو:

$$30 - 3 - 5 - 5 = 27$$

وعدد المترجمين الذين يجيدون الترجمة للغة الألمانية فقط هو:

$$20 - 3 - 1 - 5 = 11$$

وعدد المترجمين الذين يجيدون الترجمة للغة الفرنسية فقط هو:

$$25 - 5 - 1 - 5 = 14$$

وعدد المترجمين الذين يجيدون الترجمة للغة واحدة فقط هو:

$$27 + 11 + 14 = 52$$

وعدد المترجمين الذين يجيدون الترجمة للغتين دون الثالثة هو:

$$3 + 5 + 1 = 9$$

مثال (٤)

فرقة موسيقية لها ٤٢ عازفا. وجد أن عدد العازفين على آلات وترية على الأقل يساوى ٣١ وعدد العازفين على آلات نفخ على الأقل يساوى ٢٥ وعدد العازفين على آلات إيقاع على الأقل يساوى ٢٠ ، وأن عدد العازفين الذين يمكنهم العزف على آلات وترية وايقاع على الأقل يساوى عدد العازفين

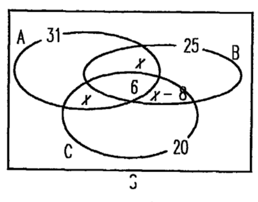
الذين يمكنهم العزف على آلات وترية ونفخ على الأقل وكل منهما يزيد بمقدار ٨ عن عدد العازفين الذين يمكنهم العزف على آلات نفخ وإيقاع على الأقل. فإذا كان عدد العازفين الذين يعزفون على الثلاث أنواع معا يساوى ٦ أوجد:

(أ) عدد العازفين الذين يعزفون على نوع واحد من الآلات دون غيره.

(ب) عدد العازفين الذين يعزفون على نوعين من الآلات فقط.

الحل

نفرض مجموعة العازفين على آلات وترية على الأقل A ومجموعة العازفين على آلات نفخ على الأقل B ومجموعة العازفين على آلات إيقاع على الأقل C. فإذا فرضنا أن عدد العازفين على آلات وترية وإيقاع دون النفخ يساوى x. فإن عدد العازفين على آلات وترية ونفخ دون الإيقاع يساوى x. وعدد العازفين على آلات نفخ وإيقاع دون الوترية يساوى $x - 8$ (أنظر شكل ١-١٩).



شكل ١-١٩

باستخدام القاعدة (د) نجد أن:

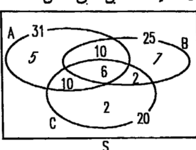
$$42 = 31 + 25 + 20 - (x + 6) - (x + 6) - (x - 8 + 6) + 6$$

$\therefore \quad 42 = 72 - 3x$

$\therefore \quad 3x = 30$

$\therefore \quad x = 10$

وبالتعويض عن تلك القيمة فإننا نحصل على شكل ١ - ٢٠.



شكل ١ - ٢٠

من الشكل يتضح أن عدد الذين يعزفون على نوع واحد فقط من الآلات هو:

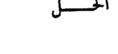
$$5 + 7 + 2 = 14$$

وعدد الذين يعزفون على نوعين من الآلات فقط هو:

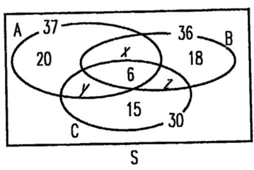
$$10 + 10 + 2 = 22$$

مثال (٥)

يورد متعهد للجرائد لدائرة من الدوائر الحكومية النسخ الآتية يوميا:
٣٧ نسخة من جريدة "الأهرام"، ٣٦ نسخة من جريدة "الأخبار"، ٣٠ نسخة من جريدة "الجمهورية". أجرى إحصاء عن موظفى الدائرة فوجد أن ٢٠ موظفا يقرأون "الأهرام" فقط، ١٨ موظفا يقرأون "الأخبار" فقط، ١٥ موظفا يقرأون "الجمهورية" فقط، ٦ موظفين يقرأون الصحف الثلاث.
أوجد عدد الذين يقرأون صحيفتين دون الثالثة وعدد موظفى الدائرة.



الحـــــل



شكل ١ – ٢١

من الشكل نجد أن:

$$x + y + 6 + 20 = 37 ,$$
$$x + z + 6 + 18 = 36 ,$$
$$y + z + 6 + 15 = 30.$$

إذن:

$$x + y = 11 \qquad (1),$$
$$x + z = 9 \qquad (2),$$
$$y + z = 12 \qquad (3).$$

من المعادلتين (1) ، (2) نستنتج أن:

$$y - z = 2 . \qquad (4)$$

من المعادلتين (3) ، (4) نستنتج أن:

$$x = 7 \ , \ z = 5$$

وبالتعويض فى المعادلة (1) نجد أن:

$$y = 4$$

إذن عدد الذين يقرأون صحيفتين دون الثالثة يساوى:

$$x + y + z = 16$$

وعدد موظفى الدائرة يساوى:

$$20 + 18 + 15 + 16 + 6 = 75$$

١ – ١١ جبر المجموعات Algebra of Sets

تتبع المجموعات قوانين جبرية اكتشفها العالم الرياضى Bool. من هذه القوانين:

* قانونا الدمج *Associative laws*

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), \quad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

* قانونا الإبدال *Commutative laws*

$$B \cup A = A \cup B, \quad B \cap A = A \cap B$$

* قوانين التوزيع *Distaibutive laws*

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C), \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C),$$

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup B) \cap (B \cup C), \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

* قانونا العقم (اللانمو) *Idempotence Laws*

$$A \cup A = A, \quad A \cap A = A$$

* قانونا الإمتصاص *Absorption Laws*

$$A \cap (A \cup C) = A, \quad A \cup (A \cap C) = A$$

* قوانين الإكمال *Complementation laws*

$$A \cup A' = S, \quad A \cap A' = \phi, \quad (A')' = A$$

* قانونا دى مورجان *De Morgan's Laws*

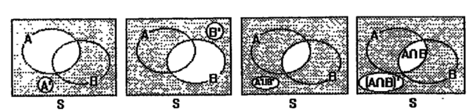
$$(A \cup B)' = A' \cap B', \quad (A \cap B)' = A' \cup B'$$

* قوانين ϕ، S

$\phi \cup A = A$, $\phi \cap A = \phi$, $\phi' = S$, $S' = \phi$,

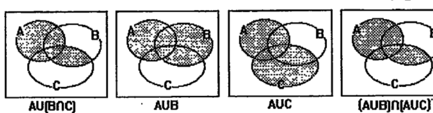
$S \cup A = S$, $S \cap A = A$, $\phi \cup A = A$, $\phi \cap A = \phi$

هذا، ويمكن تصور القوانين السابقة برسم أشكال فـــن؛ فمثــلا قـــانون دى مورجان $(A \cap B)' = A' \cup B'$ يمكن تصوره بالشكل ١-٢٢:



شكل ١ - ٢٢

وقانون التوزيع $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ يمـكن تصـــوره بالشكل (١ - ٢٣):



شكل ١ - ٢٣

غير أن هذا التصور لا يعتبر إثباتا للقوانين ولا يغنى عنه. وتوجد طرق عديـــدة للإثبات منها طريقة جداول الانتماء التى سنشرحها فيما يلى:

١-١٢ جداول الإنتماء Membership Tables

فى هذه الجداول توضع قـــيم الإنتماء للمجموعات المختلفـــة والمجموعـــات المشتقة منها جبريا ويثبت قانون ما إذا كانت قيم الإنتماء للطـــرف الأيســـر

مطابقة لقيم الانتماء للطرف الأيمن. وسنضع القيمة 1 إذا كـــان عنصر ما x ينتمى لمجموعة A والقيمة 0 إذا كانت x لا تنتمى إلى A.

مثال (١)

أثبت قانون دى مورجان:

$$A \cup B = A' \cap B'$$

الحـــــل

نضع قيم انتماء المجموعتين ونستنتج قيم انتماء كل من الطرف الأيسر والطرف الأيمن فى جدول كالآتى:

A	B	A'	B'	$A \cup B$	$(A \cup B)'$	$A' \cap B'$
1	1	0	0	1	0	0
1	0	0	1	1	0	0
0	1	1	0	1	0	0
0	0	1	1	0	1	1

يلاحظ تطابق قيم الانتماء للطرف الأيسر والطرف الأيمن المبينين فى العمودين الأخيرين من الجدول. إذن القانون صحيح.

مثال (٢)

أثبت أن $A - B = A \cap B'$.

الحـــــل

نكون الجدول:

A	B	B′	A − B	A ∩ B′
1	1	0	0	0
1	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	0	1	0	0

من تطابق العمودين الأخيرين نستنتج أن القانون صحيح.

مثال (٣)

أثبت قانون التوزيع:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

الحـــــل

نضع قيم الانتماء لكل من A ، B ، C ونستنتج قيم الانتماء لكل من الطرف الأيسر والطرف الأيمن كالآتى:

A	B	C	B∩C	A∪B	A∪C	A∪(B∩C)	(A∪B)∩(A∪C)
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	1	0	0	0
0	0	1	0	0	1	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

نلاحظ تطابق قيم الانتماء للطرف الأيسر والطرف الأيمن المبينين بـــالعمودين الأخيرين. إذن القانون صحيح.

مثال (٤)

لأى مجموعتين A ، B أثبت أن:

$$(A \cap B) \subset A \subset (A \cup B)$$

الحــــل

نكون جدول الانتماء كالآتى:

A	B	A ∩ B	A ∪ B	(A ∩ B) ⊂ A	A ⊂ (A ∪ B)
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	i
0	1	0	1	1	1
0	0	0	0	1	1

نلاحظ من العمودين الثالث والأول من الجــــدول أنه إذا انتمى أى عنصر إلى A ∩ B فإنه ينتمى أيضا إلى A. لذا فإن قيم الانتماء فى العمود الخـــامس كلها 1. ولهذا، يعتبر رأس هذا العمود قانونا فى حد ذاته، كذلـــك بالنســـبة للعمود السادس.

مثال (٥)

لأى ثلاث مجموعات A ، B ، C أثبت أن:

$$A - (B \cup C) = \text{、} \quad - B) \cap (A - C)$$

الحــــل

نكون جدول الانتماء كالآتى:

A	B	C	$B \cup C$	$A-B$	$A-C$	$A-(B \cup C)$	$(A-B) \cap (A-C)$
1	1	1	1	0	0	0	0
1	1	0	1	0	1	0	0
1	0	1	1	1	0	0	0
1	0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

من تطابق العمودين الأخيرين ينتج القانون.

مثال (٦)

لأى ثلاث مجموعات A ، B ، C أثبت أن:

$$(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$$

الحـــل

نكوّن جدول الانتماء كالآتى:

A	B	C	$A \Delta B$	$B \Delta C$	$(A \Delta B) \Delta C$	$A \Delta (B \Delta C)$
1	1	1	0	0	1	1
1	1	0	0	1	0	0
1	0	1	1	1	0	0
1	0	0	1	0	1	1
0	1	1	1	0	0	0
0	1	0	1	1	1	1
0	0	1	0	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0

من تطابق العمودين الأخيرين فى الجدول نستنتج أن القانون صحيح.

١ – ١٣ عائلات المجموعات Families of Sets

قد نحتاج فى بعض التطبيقات أن نعرّف مجموعة عناصرها مجموعات. فى هذه الحالة نطلق على تلك المجموعة اسم عائلة (*Family – Class*).

مثال (١)

لتكن $A_1 = \{1\}$ ، $A_2 = \{1,2\}$ ، $A_3 = \{1,2,3\}$ ، ...

فإن المجموعة:

$$F = \{A_1 , A_2 , A_3 , ...\} = \{\{1\} , \{1,2\} , \{1,2,3\} , ...\}$$

هى عائلة مجموعات.

مثال (٢)

لتكن X مجموعة الأشعة الموازية لمحور x ، Y هى مجموعة الأشعة الموازية لمحور y. فإن المجموعة $\mathscr{R}\{X,Y\} =$ هى عائلة عنصراها المجموعتان X ، Y.

١–١٣–١ مجموعة القوة The Power Set

تعتبر مجموعة القوة من أهم عائلات المجموعات التى يمكن اشتقاقها من مجموعة واحدة. لتكن A مجموعة غير خالية ($A \neq \phi$). المجموعة التى تحتوى كافة مجموعات A الجزئية تسمى **مجموعة القوة** *the power set* للمجموعة A ويرمز لها بالرمز $\mathscr{P}(A)$ أو 2^A.

مثال (١)

لتكن $A = \{a\}$. فإن المجموعات الجزئية لهذه المجموعة هى مجموعتان غير فعليتين هما ϕ ، $\{a\}$. إذن:

$$\mathscr{P}(A) = \{\phi , A\}$$

ونلاحظ هنا أن A تحتوى على عنصر واحد فى حين أن $\mathscr{P}(A)$ تحتوى على عنصرين (مجموعتين).

مثال (٢)

لتكن $A = \{a , b\}$. فإن المجموعات الجزئية لهذه المجموعة هى $\{a\}$ ، $\{b\}$ بالإضافة إلى مجموعتين غير فعليتين وهما ϕ ، A. إذن:

$$\mathscr{P}(A) = \{ \phi , \{a\} , \{b\} , A \}$$

ونلاحظ أن عدد عناصر A يساوى 2 وعدد عناصر (مجموعات) $\mathscr{P}(A)$ يساوى 4 أى 2^2.

مثال (٣)

لتكن $A = \{a , b , c\}$. المجموعات الجزئية لهذه المجموعة هى $\{a\}$،$\{b\}$،$\{c\}$،$\{a,b\}$،$\{b,c\}$، $\{a,c\}$ بالإضافة إلى مجموعتين غير فعليتين وهما ϕ ، A. إذن:

$$\mathscr{P}(A) = \{\phi, \{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{b,c\},\{a,c\},A\}$$

نلاحظ أن عدد عناصر A يساوى 3 وعدد عناصر (مجموعات) $\mathscr{P}(A)$ يساوى 8 أى 2^3.

نظرية

إذا كان عدد عناصر المجموعة A هو n فإن عدد عناصر $\mathscr{P}(A)$ يساوى 2^n.

البرهان

يمكن أن نمثل العناصر بعدد n من الكرات المرقمة موضوعة داخل كيس يراد وضع كل منها فى إحدى خانتين: الأولى 0 (وهذه تناظر عدم وجود العنصر فى

المجموعة الجزئية) والثانية 1 (وهذه تناظر وجود العنصر فى المجموعة الجزئية) مع السماح بوجود أكثر من كرة فى خانة واحدة. إذن يمكن وضع كـــل كــرة بطرق عددها n. إذن عدد طرق الاختيار (أى عدد عناصر $\mathscr{P}(A)$) يســاوى 2^n أى 2 مرفوعة للقوة n. وربما تكون تلك النتيجة سببا فى التسمية مجموعة القوة للمجموعة A والتى يرمز إليها أحيانا بالرمز 2^A.

١ - ١٤ تجزىء المجموعات Partitioning of Sets

يقصد بتجزىء مجموعة ما A تقسيمها إلى مجموعات جزئية A_1 ، A_2،...،A_n تحقق الشرطين الآتيين:

(أ) كل مجموعتين جزئيتين مختلفتين A_i ، A_j متباعدتان. أى:

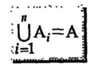
$$A_i \cap A_j = \phi \quad \forall i \neq j$$

ويسمى هذا الشرط أحيانا شرط التباعد.

(ب) اتحاد كل المجموعات الجزئية يساوى المجموعة الأصلية A. أى:

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = A$$

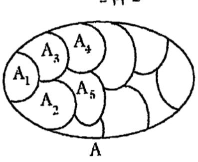
ويكتب هذا الشرط أحيانا بالصورة:



$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A$$

ويسمى هذا الشرط أحيانا شرط التكامل.

(أنظر شكل ١-٢٤).



شكل ١-٢٤

مثال (١)

إذا كانت $A = \{a,b,c,d,e,f\}$ ؛ فإن العائلة:

$$\mathscr{F} = \{\{a,b,c\}, \{d,e\}, \{f\}\}$$

تعتبر تجزيئا للمجموعة A ، فى حين أن العائلة:

$$\mathscr{G} = \{\{a,b,c\}, \{c,d,e\}, \{e,f\}\}$$

ليست تجزيئا للمجموعة A حيث أنها لا تحقق الشـــرط الأول وهـــو شـــرط التباعد؛ إذ أن:

$$\{a,b,c\} \cap \{b,c,d\} \neq \phi$$

أيضا العائلة:

$$\mathscr{H} = \{\{a,b\}, \{d,e\}\}$$

ليست تجزيئا للمجموعة A لعدم تحقق الشرط الثانى وهو شرط التكامل.

أماالعائلة:

$$\mathscr{I} = \{\{a,b,c\}, \{c,d\}\}$$

فليست تجزيئا لأن كِلا الشرطين لا يتحققان.

مثال (٢)

لتكن E هى مجموعة الأعداد الزوجية الموجبة، O مجمـــوعة الأعداد الفـــردية الموجبة. فإن العائلة{E , O} تعتبر تجزيئا لمجموعة الأعداد الطبيعية N. من ناحية

أخرى لتكن A هى مجموعة الأعداد الموجبة التى تقبل القسمة على 2، B هـــى مجموعة الأعداد الموجبة التى تقبل القسمة على 3. فإن العائلة {A , B} لا تعتبر تجزيئا لمجموعة الأعداد الطبيعية N لأنها لا تحقق أياً من الشرطين.

مثال (٣)

لتكن I هى الفترة الحقيقية $[a , b]$ ولتكن $x_1 , x_2 , \dots , x_n \in I$ بحيث:

$$a < x_1 < x_2 < \dots < x_n < b$$

لتكن J_1 ، J_2 ، ... ، J_n هى الفترات الجزئية الآتية:

$$J_1 = [a, x_1] , J_2 = [x_1 , x_2] , \dots , J_n = [x_n , b]$$

ولتكن K_1 ، K_2 ، ... ، K_n هى الفترات الجزئية الآتية:

$$K_1 = (a, x_1) , K_2 = (x_1 , x_2) , \dots , K_n = (x_n , b)$$

ولتكن I_1 ، I_2 ، ... ، I_n هى الفترات الجزئية الآتية:

$$I_1 = [a, x_1) , I_2 = [x_1 , x_2) , \dots , I_n = [x_n , b]$$

أى من العائلات:

$$\mathscr{J} = \{J_1, J_2,\dots,J_n\}, \mathscr{K} = \{K_1,K_2,\dots,K_n\} , \mathscr{I} = \{I_1, I_2,\dots,I_n\}$$

تجزىء للفترة I ؟ لماذا؟

الحـــــل

العائلة $\mathscr{J}$ ليست تجزيئا للفترة I حيث أن شرط التباعد غير متحقق؛ فمثلا:

$$J_1 \cap J_2 = \{x_1\} \neq \phi$$

كذلك العائلة $\mathscr{K}$ ليست تجزيئا للفترة I حيث أن شرط التكامل غير متحقق ؛ إذ أن:

$$K_1 \cup K_2 \cup \dots \cup K_n = I - \{x_1 , x_2 , \dots , x_n\}$$

أما العائلة $\mathscr{I}$ فهى تجزىء للفترة I إذ أنها تحقق الشرطين معا.

١-١٤-١ تكرير التجزىء Refinement of Partitioning

بديهى أننا يمكن أن نعرّف أكثر من تجزىء لمجموعة واحدة A.
يسمى التجزىء $\mathscr{P}'=\{A_1',A_2',\ldots,A_n'\}$ تكريراً *Refinement* للتجزىء $\mathscr{P}=\{A_1,A_2,\ldots,A_n\}$ إذا كانت كل مجموعة جزئية A_i' فى $\mathscr{P}'$ هى أيضاً مجموعة جزئية من مجموعة ما $A_j \in \mathscr{P}$.

مثال

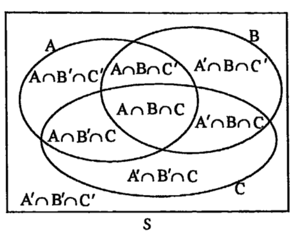
فى المثال الأول يعتبر التجزىء $\mathscr{F}'=\{\{a,b\},\{c\},\{d\},\{e\},\{f\}\}$ تكريرا للتجزىء $\mathscr{F}=\{\{a,b,c\},\{d,e\},\{f\}\}$ فى حين أن التجزىء $\mathscr{G}=\{\{a,b\},\{c\},\{d\},\{e,f\}\}$ ليس كذلك (لماذا؟).

١-١٥ المجموعات الصغرى Minsets

لتكن A ، B ، C ثلاث مجموعات جزئية من مجموعة شاملة S. لنأخذ المجموعات الجزئية المكونة من العائلة $\mathscr{C}=\{A,B,C\}$:

$(A\cap B\cap C)$;
$(A'\cap B\cap C), (A\cap B'\cap C), (A\cap B\cap C')$;
$(A\cap B'\cap C'), (A'\cap B\cap C'), (A'\cap B'\cap C)$;
$(A'\cap B'\cap C')$

وعددها ثمان أى 2^3 .كل من هذه المجموعات الثمان تسمى **مجموعة صغرى مولّدة بالعائلة** $\mathscr{C}$ ***a minset generated by*** $\mathscr{C}$. هذه المجموعات الصغرى متباعدة مثنى مثنى وهى أيضا شاملة كما يتبين من شكل ١-٢٥.



شكل ١-٢٥

إذن فإن العائلة:

$$\mathscr{M} = \{(A\cap B\cap C),(A\cap B\cap C'),(A\cap B'\cap C),(A\cap B'\cap C'),$$
$$(A'\cap B\cap C),(A'\cap B\cap C'),(A'\cap B'\cap C),(A'\cap B'\cap C')\}$$

تمثل تجزيئا للمجموعة S.

وبوجه عام لتكن $\mathscr{F} = \{A_1 , A_2 , \dots , A_n\}$ عائلة مجموعات جزئية من مجموعة شاملة S. أى مجموعة بالصورة $\bigcap_{i=1}^{n} \hat{A}_i$ ، حيث $\hat{A}_i$ هى A_i أو مكملتها A'_i تسمى $\mathscr{F}$ وعددها يساوى 2^n .

سنرمز للمجموعة الصغرى $\bigcap_{i=1}^{n} \hat{A}_i$ بالرمز $M_{\delta_1\delta_2\dots\delta_i\dots\delta_n}$ حيث:

$$\delta_i = \begin{cases} 1, & \hat{A}_i = A_i \\ 0, & \hat{A}_i = A'_i \end{cases}$$

فمثلا:

$$M_{11\dots1\dots1} = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_i \cap \dots \cap A_n ,$$
$$M_{11\dots0\dots1} = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A'_i \cap \dots \cap A_n$$

نظرية

العائلة:

$$\mathscr{M}\{A_1 , A_2 , \dots , A_n\} = \{ \bigcap_{i=1}^{n} \hat{A}_i \}$$

هى تجزىء للمجموعة الشاملة S.

البرهان

يكفى أن نثبت أن أى عنصر من عناصر S ينتمى إلى واحدة بالضبط من المجموعات الصغرى. أى عنصر $x \in S$ إما أن ينتمى إلى A_1 أو إلى مكملتها A_1'. وأيضا نفس العنصر x إما أن ينتمى إلى A_2 أو إلى مكملتها A_2' ،... وهكذا. وبذلك فإن العنصر x لابد أن ينتمى إلى إحدى المجموعات الصغرى المولدة بالمجموعة $\{A_1 , A_2 , \dots , A_n\}$.

إذن فإن العائلة $\mathscr{M}$ شاملة (١)

إذا كانت T تقاطع مجموعتين صغريين، فإنه توجد i بحيث تكون T محتواه داخل كل من A_i ، A_i' أى داخل ϕ.

إذن فإن العائلة $\mathscr{M}$ متباعدة مثنى مثنى (٢)

من (١) ، (٢) ينتج المطلوب.

١-١٦ المجموعات الكبرى Maxsets

لتكن $\mathscr{F} = \{A_1 , A_2 , \dots , A_n\}$ عائلة مجموعات جزئية من مجموعة شاملة S. أى مجموعة بالصورة $\bigcup_{i=1}^{n} \hat{A}_i$، حيث $\hat{A}_i$ هى A_i أو مكملتها A_i' تسمى مجموعة كبرى مولدة بالعائلة $\mathscr{F}$.

وعلى النقيض من عائلة المجموعات الصغرى فإن عائلة جميع المجموعات الكبرى المولّدة بالعائلة $\mathscr{F}$ لا تكوّن تجزيئا للمجموعة الشاملة S.

تمريـــــــن (١)

١. إذا كانت:

$S = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ ، $X = \{1,2,3,4,5\}$ ، $Y = \{2,3,6,8\}$ ، $Z = \{3,5,6,7\}$ أوجد:

(أ) X' (ب) $X \cap Z$

(ج) $(X \cap Z)'$ (د) $X \cup Y$

(هـ) $Y - Z$ (و) $X \cap Y'$

(ز) $Z \cup (Y - Z)$ (ح) $Y \cap X'$

(ط) $X \cup Z'$ (ى) $(X - Y) \cap Y$

(ك) $(X - Y)' - X$ (ل) $(X \cap Z) \cup (X \cap Z)$

(م) $Y' \Delta ?X$ (ن) $\mathscr{P}(Y)$.

٢. لأى مجموعتين A ، B أثبت أن:

(أ) $A - B' = B - A'$

(ب) $A' - B = A' \cap B' = B' - A$

(ج) $A - B = A - (A \cap B) = (A \cup B) - B$

(د) $A = (A \cap B) \cup (A - B')$

(هـ) $A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B) = (A \cup B) \cap (A' \cup B')$

٣. لأى ثلاث مجموعات A ، B ، C أثبت صحة القوانين الآتية:

(أ) $A \cap (B \cap C)' = (A - B) \cup (A - C)$

(ب) $A \cup (B \cup C)' = (A \cup B') \cap (A \cup C')$

(ج) $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$

(د) $(A \cap B) \cup (A' \cap C) \cup (B \cap C) = (A \cap B) \cup (A' \cap C)$

(هـ) $[(A \cup B') \cup (A' \cap (B \cup C'))]' = (A' \cup B) \cap (A \cup B') \cap (A \cup C)]$

٤. عشرون مريضا ظهرت عليهم أعراض المرض x ، ثلاثون ظهرت عليهم أعراض المرض y ، خمسة ظهرت عليهم أعراض كلا المرضين. أوجد عدد المرضى.

٥. فى حفل استقبال لمائة شخص وجد أن:

١٠ شربوا عصير البرتقال فقط، ٣٠ شربوا عصير الليمون فقط، ١٥ شربوا مياه غازية فقط، ٨ شربوا عصير البرتقال وعصير الليمون، ٥ شربوا عصير البرتقال ومياه غازية، ٦ شربوا عصير الليمون ومياه غازية، ٤ شربوا الأنواع الثلاثة. بفرض أن الشارب لا يكرر الشرب من نوع واحد أوجد:

عدد كؤوس عصير البرتقال، عدد كؤوس عصير الليمون، عدد زجاجات المياه الغازية، عدد الذين لم يتناولوا أى مشروبات.

٦. فى عينة مكونة من ٥٧ طالبا وجد أن ٣٦ طالب يلعبـــون كـــرة القدم، ٣٠ يلعبون كرة السلة، ٢٥ يلعبون التنـــس، ٦ طـــلاب يلعبون الثلاثة ألعاب. فإذا كان عدد الطلبة الذين يلعبـــون كـــرة القدم والسلة يســـاوى عدد الطلبة الذين يلعبون القدم والتنـــس، عدد الطلبة الذين يلعبون السله والتنس يساوى نصف عدد الطلبة الذين يلعبون كره القدم والسلة أوجد عدد الطلاب الذين يلعبون كره القدم فقط وعدد الطلاب الذين يلعبون كره السلة فقط وعدد الطلاب الذين يلعبون التنس فقط وعدد الطلاب الذين يلعبون لعبه واحده فقط وعدد الطلاب الذين يلعبون لعبتين فقط.

٧. يتكون مجلس الأمن من ١٥ دولة منها خمس دائمـــة: الولايـــات المتحدة الأمريكية – روسيا (الأتحاد السوفيتى سابقا) – المملكـــة المتحدة – فرنسا – الصين؛ وهذه الدول لها حق الإعـــتراض على أى قرار (الفيتو) ؛ ١٠ دول بالتناوب. فإذا كان أى اقتراح ينجح إذا حصل على ٩ أصـــوات وأرادت دولة تكوين "مجموعة رابحة" لإنجاح قرار ما فماذا يكون تشكيل تلك المجموعة؟

٨. أكتب عائلة القوة للمجموعة $A = \{a,b,c,d\}$. هل تعتبر عائلـــة القوة $\mathcal{P}(A)$ تجزيئا للمجموعة A ؟ لماذا؟

الباب الثانى

مقدمة فى المنطق الرياضى

AN INTRODUCTION TO MATHEMATICAL

٢-١ مقدمة

يرجع الفضل فى إرساء قواعد المنطق الرياضى للعالم البريطانى جورج بـــوول (١٨١٥-١٨٦٤) الذى نشأ فى مقاطعة لانكشـــاير وقضى معظم سنوات إنتاجه العلمى فى أيرلندة. وكان من أعظم اكتشافاته فى منتصف القرن التاسع عشر استخدام الرموز الرياضية فى المنطق بالصورة التى نراه عليها اليوم مما حوَّل المنطق من علم نظرى قابل للجدل إلى علم تام يخضع لأصول وقواعد رياضية. وفى القرن العشرين كان جون مكارثى أول من اقترح استخدام المنطق الرياضى فى تمثيل عمليات الاستدلال واتخاذ القرارات، وذلك فى بحـــث قدمـــه عـــام ١٩٥٨. وسنبدأ بدراسة ما يُسمَّى بـ حســـاب القضايـــا *prepositional calculus* ثم نكمل تلك الدراسة بشرح ما يسمى بـ حســـاب المحمـــول *predicate calculus*.

٢-٢ التقارير Statements

التقرير هو جملة خبرية قد تكون صحيحة وقد تكون خاطئة ولكنها لا يمكن أن تكون صحيحة وخاطئة فى آن واحد. وسنعطى هنا بعض الأمثلة:

(أ) مصر بلد عربى.

(ب) السماء تمطر الآن.

(د) جميع المثلثات حادة الزوايا.

(هـ) مجموعة الأعداد الصحيحة هى مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية.

كل جملة من الجمل السابقة تمثل تقريرا قد يكون صحيحا كما فى (أ) ، (هـ) وقد يكون خاطئا كما فى (ج) ، (د) ، (و) وقد يحتمل الصواب أو الخطأ كما فى (ب). وهناك جمل لا تعتبر تقارير مثل:

(ز) إذهب للمحاضرة (أمر).

(ح) كم عدد عناصر المجموعة $A = \{1,2,5,8\}$ ؟ (إستفهام).

(ط) ياعمرو (نداء).

(ى) ما أجمل الزهور ! (تعجُّب).

وإذا كان التقرير يحمل خبرا واحدا سمى تقريرا بسيطا *simple statement* ؛ أما إذا كان مركبا من عدة تقارير بسيطة فيسمى تقريرا مركَّبا *complex statement* ويلاحظ أن التقارير (أ) ، (ب) ، (ج) ، (د) كلها بسيطة. وسنبين فيما يلى كيفية تكوين وقراءة وتحليل تقارير مركبة.

٢-٣ قيم الحقيقة Truth Values

سنرمز للتقارير البسيطة بأحد الحروف ...., p, q, r ؛ وإذا كان التقرير صحيحا أعطى القيمة 1 أما إذا كان خاطئا فيعطى القيمة 0 وتسمى هاتان القيمتان قيمتى الحقيقة *truth values* ؛ فمثلا ليكن p هو التقرير $2 > \sqrt{3}$ وليكن q هو التقرير $\sqrt{5} < 2$ ، فإن قيمتى الحقيقة للتقريرين p ، q تعطى بالجدول الآتى:

p	q
1	0

ويسمى جدول الحقيقة *truth table*.

٢-٤ النفى Negation

لكى ننفى التقرير p نستخدم الرمز" p ~ " ويقرأ "ليس p" ومن الواضح أن نفى التقرير p ~ هو تقرير قيمة حقيقته مخالفة لقيمة حقيقة التقرير p . أى أن نفى التقرير يمكن أن يعرَّف من الجدول الآتى:

p	$\sim p$
1	0
0	1

وأداه النفى " ~ " هى أداة أحادية، إذ أنها تؤثر على تقرير واحد.

سنعرِّف الآن أدوات ربط ثنائية *Junctors* تربط بين تقريرين:

٢-٥ أداه العطف Conjunction

ليكن p ، q تقريرين. نستطيع أن نكوِّن تقريرا مركبا $p \wedge q$ من p ، q يكون صحيحا فى حالة واحدة فقط وهى إذا كان كل من التقريرينp ، q صحيحا.

ويقرأ التقرير"$p \wedge q$" "p and q"، ويمكن أن نعرِّف $p \wedge q$ بالجدول الآتى:

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

مثال (١)

ليكن p هو التقرير"مصر بلد عربى"، وليكن q هو التقرير "مصر بلد أفريقى".

إذن $p \wedge q$ هو التقرير "مصر بلد عربى ، مصر بلد أفريقى" أى "مصر بلد عربى أفريقى".

واضح أن قيم الحقيقة للتقارير p ، q ، $p \wedge q$ هى 1، 1، 1 .

مثال (٢)

ليكن p هو التقرير $\sqrt{3} < 2$ وليكن q هو التقرير $\sqrt{5} < 2$. واضح أن قيم الصواب والخطأ للتقارير p ، q ، $p \wedge q$ هى 0 ، 1، 0 على الترتيب.

٢-٦ أداة التخيير Disjunction

ليكن p ، q تقريرين. نستطيع أن نكوّن التقرير المركب $p \vee q$ ويُقرأ "p or q" من التقريرين p ، q ويكون صوابا إذا كان أحد التقريرين أو كلاهما صوابا. أى يكون التقرير $p \vee q$ خطأ فى حالة واحدة وهى إذا كان كلٌ من التقريرين p ، q خطأ. ويُعرَّف $p \vee q$ من الجدول الآتى:

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

وتسمى أداه الربط " $\vee$ " "أو الشاملة" "*Inclusive or*". هذا، وتوجد أداة ربط أخرى تسمى "أو الاستبعادية" "*Exclusive or*" ويُرمز لها بالرمز " $\underline{\vee}$ " ويكون التقرير $p \underline{\vee} q$ صوابا إذا كان أحد التقريرين p أو q صوابا دون الآخر وتُعرَّف من خلال الجدول الآتى:

p	q	$p \veebar q$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

مثال (١)

ليكن p هو التقرير: 8 عدد أولى، q هو التقرير: 9 عدد طبيعـــى. إذا أردنـــا التعبير عن التقرير : 8 عدد أولى أو 9 عدد طبيعى فإننا نكتب $p \vee q$.

مثال (٢)

فى حفلة ما كان مسموحا للضيف اختيار مشروب واحد "قهوة" أو "شاى". فإذا رمزنا لاختيار أحمد أن يشرب "القهوة" بالرمز p واختيار أحمد أن يشرب "الشاى" بالرمز q فان العبارة: أحمد اختار أن يشرب قهوة أو شاى يرمز لهـــا بالرمز: $p \veebar q$.

٢-٧ تكافؤ تقريرين Equivalence

يتكافأ تقريران إذا تطابقت قيمتا صوابهما فى الجدول. ويرمز للتكافؤ بـــالرمز "$\equiv$".

مثال (١)

توجد قاعدة منطقية شهيرة وهى "نفى النفى إثبات" ويُعبَّر عن تلك القـــاعدة بالتكافؤ:

$$\sim(\sim p) \equiv p$$

وللبرهنة على صحة هذه القاعدة نكوّن الجدول الآتى:

p	$\sim p$	$\sim(\sim p)$
1	0	1
0	1	0

يتّضح من الجدول أن العمودين الأول والثــــالث متطابقـــان. إذن القـــاعدة صحيحة.

مثال (٢)

برهن على أن :

$$\sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$$

الحـــــل

نكوّن الجدول الآتى:

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \wedge q$	$\sim(p \wedge q)$	$\sim p \vee \sim q$
1	1	0	0	1	0	0
1	0	0	1	0	1	1
0	1	1	0	0	1	1
0	0	1	1	0	1	1

من تطابق العمودين الأخيرين ينتج التكافؤ.

مثال (٣)

أثبت أن:

$$p \underline{\vee} q \equiv (p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge q)$$

الحـــــل

نكوّن الجدول الآتى:

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \wedge \sim q$	$\sim p \wedge q$	$p \underline{\vee} q$	$(p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge q)$
1	1	0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	1	0	1	1
0	1	1	0	0	1	1	1
0	0	1	1	0	0	0	0

من تطابق العمودين الأخيرين ينتج التكافؤ.

٢-٨ التقارير الصائبه منطقيا والخاطئة منطقيا Tautology & Contradiction

إذا احتوى جدول الحقيقة لتقرير ما على القيمة 1 فى جميع صفوفه فإننا نقول أن هذا التقرير صائب منطقيا *Tautology* أما التقرير الذى يحتوى جدول الصواب والخطأ له على القيمة 0 فى جميع صفوفه فيقال أنه تقرير خاطئ منطقيا *Contradiction*.

مثال (١)

التقرير $p \vee \sim p$ تقرير صائب منطقيا وجدول حقيقته كالآتى:

p	$\sim p$	$p \vee \sim p$
1	0	1
0	1	1

مثال (٢)

التقرير $p \wedge \sim p$ تقرير خاطىء منطقيا وجدول حقيقته كالأتى:

p	$\sim p$	$p \wedge \sim p$
1	0	0
0	1	0

هذا، وسنرمز للتقرير الصائب منطقيا بالرمز T ، أما التقرير الخاطىء منطقيا فسنرمز له بالرمز F ؛ وإذا كان التقرير غير صائب منطقيا وغير خاطىء منطقيا فانه يكون غير معين. مثال ذلك التقارير $p \wedge q$ ، $p \vee q$ ، $p \wedge \sim q$ ، ...

٢-٩ قوانين المنطق Logical Laws

لعلنا لاحظنا أن التكافؤ فى المنطق يناظر التساوى فى المجموعات، وأن النفى فى المنطق يناظر التكميل فى المجموعات، وأن أداة العطف "$\wedge$" تناظر التقاطع "$\cap$" وأن أداة التخيير " $\vee$ " تناظر الاتحاد " $\cup$ "، وأن التقرير الصائب منطقيا " T "يناظر المجموعة الشاملة " S "، كما أن التقرير الخاطئ منطقيا "F" يناظر المجموعة الخالية "ϕ" ؛ ولذلك فإن للمنطق الرياضى قوانين تشابه تماما تلك الموجودة فى المجموعات وهذه القوانين هى:

أ) قانونا الدمج

$$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r) \quad , \quad (p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$$

ب) قانونا الإبدال

$$p \wedge q \equiv q \wedge p \quad , \quad p \vee q \equiv q \vee p$$

(ج) قوانين التوزيع

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \; , \; (p \vee q) \wedge r \equiv (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$$
$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r) \; , \; (p \wedge q) \vee r \equiv (p \vee r) \wedge (q \vee r)$$

(د) قانونا (العقم) اللانمو

$$p \wedge p \equiv p \quad , \quad p \vee p \equiv p$$

(هـ)قانونا الامتصاص

$$p \wedge (p \vee q) \equiv p \quad , \quad p \vee (p \wedge q) \equiv p$$

(و) قوانين النفى

$$\sim(\sim p) \equiv p \quad , \quad p \wedge \sim p \equiv \mathrm{F} \quad , \quad p \vee \sim p = \mathrm{T}$$

(ز) قانونا دى مورجان

$$\sim(p \wedge q) \equiv \; \sim p \vee \sim q \qquad \sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$$

(ح) قوانين T ، F

$$p \wedge \mathrm{T} \equiv p \; , \; p \wedge \mathrm{F} \equiv \mathrm{F} \; , \; p \vee \mathrm{T} \equiv \mathrm{T} \; , \; p \vee \mathrm{F} \equiv p \; , \; \sim \mathrm{T} \equiv \mathrm{F} \; , \sim \mathrm{F} \equiv \mathrm{T}$$

ونستطيع البرهنة على تلك القوانين باستعمال جداول الحقيقة.

مثال (١)

أثبت قانون التوزيع $p \vee (q \wedge r) = (p \vee q) \wedge (p \vee r)$.

الحـــل

نكون جدول الحقيقة الآتى:

p	q	r	$q \wedge r$	$p \vee q$	$p \vee r$	$p \vee (q \wedge r)$	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	1	0	0	0
0	0	1	0	0	1	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

واضح من الجدول أن العمودين الأخيرين متطابقان. إذن القانون صحيح.

مثال (٢)

أثبت أن:

$$\sim [(p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)] \equiv p \veebar q$$

الحـــل

يمكن إثبات التكافؤ عن طريق جدول الحقيقة كالآتى:

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p\wedge q$	$\sim p\wedge\sim q$	$(p\wedge q)\vee(\sim p\wedge\sim q)$	$\sim[(p\wedge q)\vee(\sim p\wedge\sim q)]$	$p\,\underline{\vee}\,q$
1	1	0	0	1	0	1	0	0
1	0	0	1	0	0	0	1	1
0	1	1	0	0	0	0	1	1
0	0	1	1	0	1	1	0	0

من تطابق العمودين الأخيرين ينتج التكافؤ المطلوب.

وفضلا عن ذلك يمكن إثبات التكافؤ باستخدام قوانين المنطق كالآتى:

$$(p\wedge q)\vee(\sim p\wedge\sim q) \equiv [(p\wedge q)\vee(\sim p)]\wedge[(p\wedge q)\vee(\sim q)]$$

(قوانين التوزيع)

$$\equiv [(p\vee\sim p)\wedge(q\vee\sim p)]\wedge[(p\vee\sim q)\wedge(q\vee\sim q)]$$

(قوانين التوزيع)

$$\equiv [T\wedge(q\vee\sim p)]\wedge[(p\vee\sim q)\wedge T]$$

(قوانين النفى)

$$\equiv (q\vee\sim p)\wedge(p\vee\sim q)$$

(قوانين F ، T)

$$\sim[(p\wedge q)\vee(\sim p\wedge\sim q)] \equiv \sim[(q\vee\sim p)\wedge(p\vee\sim q)]$$

$$\equiv [\sim(q\vee\sim p)]\vee[\sim(p\vee\sim q)]$$

(قوانين دى مورجان)

$$\equiv [\sim q\wedge\sim(\sim p)]\vee[\sim p\wedge\sim(\sim q)]$$

(قوانين دى مورجان)

$$\equiv (\sim q\wedge p)\vee(\sim p\wedge q)$$

(قوانين النفى)

$$\equiv (p\wedge\sim q)\vee(\sim p\wedge q)$$

(قوانين الإبدال)

$$\equiv p\,\underline{\vee}\,q$$

(من التعريف)

٢-١٠ أداة الشرط " $\rightarrow$ " Conditional Junction

التقرير "إذا p فإن q" يسمى تقريرا شرطيا *Conditional statement* ويكتب $p \rightarrow q$ وعندئذ تسمى p المقدمة *antecedent* أو الفـرض ويسمى q التالى *consequent* أو النتيجة. وينبغى أن نلاحظ هنا أن " $p \rightarrow q$ "معناه "إذا كان التقرير p صائبـا فإن التقرير q يكون صائبـا أيضا". أما إذا كان p خاطئاً فإن q قد يكون صائبا وقد يكون خاطئا. أى أن التقرير $p \rightarrow q$ يكون خاطئـاً فى حالـة واحـدة فقـط وهـى إذا كـان p صائبـا ، q خاطئا.

مثال (١)

"إذا كانت السماء تمطر فإنه يوجد سحاب". هذه العبارة يمكن كتابتها رياضيا كالآتى:

ليكن التقرير p هو "السماء تمطر" ، وليكن التقرير q هو "يوجد سـحاب".
إذن العبارة "إذا كانت السماء تمطر فإنه يوجد سحاب" تكتـب $p \Rightarrow q$.
وتكون العبارة خاطئة فى حالة واحدة فقط وهى إذا كانت السماء تمطـر ولا يوجد سحاب.

مثال (٢)

قال المرشح للناخبين: "إذا انتخبتمونى فسأبنى لكم كوبريا يربط بـين شقّـى البلدة". هذه العبارة يمكن كتابتها رياضيا كالآتى:

ليكن التقرير p هو "انتخبتموني" ، وليكن التقرير q هو"سأبنى لكم كوبريـا

يربط بين شقّى البلدة". إذن العبارة "إذا انتخبتمونى فسأبنى لكم كوبريا يربط بين شقّى البلدة" تكتب $p \to q$. وتكون العبارة خاطئة فى حالة واحدة فقط وهى إذا انتُخِب المرشح و لم يُبن الكوبرى.

مما سبق يتبين أن جدول الحقيقة للتقرير $p \to q$ هو:

p	q	$p \to q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

تمرين (١)

أثبت أن التقــرير $p \to q$ يكافئ التقــرير $(\sim p) \vee q$ والذى يكافئ بدوره التقــرير $\sim (p \wedge \sim q)$ وذلك بمقارنة جداول الحقيقة لها.

تمرين (٢)

أثبت أن التقرير $p \to (p \vee q)$ صائب منطقيا.

تمرين (٣)

أثبت أن التقرير $p \to q$ يكافئ التقرير $\sim q \to \sim p$.

٢-١١ أداة الشرط المزدوج"$\leftrightarrow$" Bi-directional Conditional Junction

التقرير "p إذا وفقط إذا q" يسمى " *شرطا مزدوجا* " ويُكتـــب " $p \leftrightarrow q$". ويعنى "إذا p فإن q وإذا q فإن p". لذا فإن التقرير" $p \leftrightarrow q$" يكون خاطئا إذا اختلفت قيمتا الحقيقة للتقريرين p ، q. إذن فإن جـــدول الحقيقـــة للتقريـــر " $p \leftrightarrow q$" هو:

p	q	$p \leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

وإذا اتخذنا هذا الجدول كتعريف، فإن:

$$p \leftrightarrow q \equiv [(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)]$$

ويمكن إثبات ذلك عن طريق جداول الحقيقة كالآتى:

p	q	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$p \leftrightarrow q$	$[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)]$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	0	0
0	0	1	1	1	1

واضح أن العمودين الأخيرين متطابقان. إذن التكافؤ صحيح.

٢-١٢ التضمين Implication

إذا كان التقرير $P \rightarrow Q$ صائبا منطقيا فإنه يسمى تضمينا ***implication***

ويكتب عندئذ $P \Rightarrow Q$.

مثال (١)

أثبت أن التقرير $[(p \rightarrow q) \wedge p] \rightarrow q$ تضمين.

الحـــل

نُكَوِّن جدول الحقيقة الآتى:

p	q	$p \to q$	$(p \to q) \wedge p$	$[(p \to q) \wedge p] \to q$
1	1	1	1	1
1	0	0	0	1
0	1	1	0	1
0	0	1	0	1

يتبين من الجدول أن التقرير $[(p \to q) \wedge p] \to q$ صائب منطقيا وبذلك يكون تضمينا ويمكن كتابته بالصورة $[(p \to q) \wedge p] \Rightarrow q$.

مثال (٢)

أثبت أن التقرير $[(p \to q) \wedge q] \to p$ ليس تضمينا.

الحـــــل

نكون جدول الحقيقة الآتى:

p	q	$p \to q$	$(p \to q) \wedge q$	$[(p \to q) \wedge p] \to p$
1	1	1	1	1
1	0	0	0	1
0	1	1	1	0
0	0	1	0	1

واضح من الجدول أن التقرير $[(p \to q) \wedge q] \to p$ غير صائب منطقيـــا (لوجود الصفر فى العمود الأخير). إذن التقرير ليس تضمينا. أى أن:

$$[(p \to q) \wedge q] \not\Rightarrow p$$

٢-١٢-١ قاعدة التسلسل المنطقى Chain Rule

قاعدة التسلسل المنطقى *chain rule* هى من أهم قواعد الاستدلال المنطقـــى *rules of inference* وتنص على أنه إذا أدّى التقرير p إلى التقريـــر q وأدّى التقـــرير q إلى التقرير r فإن التقرير p يؤدّى حتما إلى التقرير r . أى أن:

$$[(p \to q) \wedge (q \to r)] \Rightarrow (p \to r)$$

البرهان

نكوّن جدول الحقيقة الآتى:

p	q	r	$p \to q$	$q \to r$	$p \to r$
1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	1	1
1	0	0	0	1	0
0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1
0	0	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1

ومنه نستنتج جدول الحقيقة الآتى:

$(p \to q) \wedge (q \to r)$	$[(p \to q) \wedge (q \to r)] \to (p \to r)$
1	1
0	1
0	1
0	1
1	1
0	1
1	1
1	1

من العمود الأخير تتضح القاعدة.

هذا؛ ونستطيع أن نعطى أمثلة من الحياة اليومية على هذه القاعدة؛ فمثلا العبارة: "إذا تحققت العدالة زاد الإنتاج، وإذا زاد الإنتاج عم الرخاء؛ إذن إذا تحققت العدالة عم الرخاء" هى تسلسل منطقى.

٢-١٣ المحاجّات Arguments

نتعرض فى كثير من مناقشاتنا اليومية إلى ما يسمى بـ المحاجّات *arguments* ؛ فالمرافعات فى ساحات القضاء، وخطب المرشحين للانتخابات، وإعلانات الصحف والتليفزيون أمثلة من المحاجّات. ورياضيا فإن فإن أى تقرير مركب بالشكل الآتى:

$$(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n) \to q$$

يسمى محاجّة *argument* وتسمى التقارير الأولية p_1 ، p_2 ، ... ، p_n التى تكون المقدمة حيثيات *premises* ؛ أما التقرير q الذى يكون النتيجة فيسمى الحكم *conclusion* . وتكون المحاجة قائمة *valid* إذا كانت صائبة منطقيا وإلا كانت داحضة (زائفة) *fallacious*. هذا، والمحاجة القائمة التى تكون حيثياتها

كلها صحيحة تسمى مسموعة *sound* ؛ أما المحاجة التى إحدى أو بعض حيثياتها غير صحيحة فتسمى غير مسموعة *unsound*.

مثال (١)

لنأخذ التقرير المركب "إذا ارتفعت أسعار البترين فإن أسعار السلع ترتفـــــع. وقـــد زادت أسعار البترين . إذن فإن أسعار السلع سوف ترتفع" . إذا رمزنا للتقريـــر البسيط "زادت أسعار البترين". بالرمز p والتقرير البسيط "ارتفعت أسعار السلع " بالرمز q فإن التقرير " إذا ارتفعت أسعار البترين فإن أسعـــــار السلع ترتفع" هو $p \to q$. وبذلك يكون التقرير المركـــــب المذكـــور هـــو $(p \to q) \wedge p \to q$ وقد أثبتنا قبل ذلك أنه تقرير صائب منطقيا. إذن فـــــهو محاجة قائمة.

مثال (٢)

لنأخذ التقرير المركب "إذا ارتفعت أسعار البترين فإن أسعار السلع ترتفع. وقد ارتفعت أسعار السلع. إذن فلابد أن أسعار البترين قد ارتفعت". باستخـــدام الرموز فى المثال (١) فإن هذا التقرير يكتب $(p \to q) \wedge q \to p$ وقد أثبتنا قبل ذلك أنه تقرير غير صائب منطقيا. إذن فهو محاجة زائفة.

مثال (٣)

لنأخذ التقرير المركب "إذا ارتفعت أسعار البترين فإن أسعار السلع ترتفع. و لم ترتفع أسعار البترين. إذن فلابد أن أسعار السلع لن ترتفع". باستخدام الرموز فى المثال (١) فإن هذا التقرير يكتب $(p \to q) \wedge (\sim p) \to (\sim q)$. لتقرير صحة هذا التقرير منطقيا نكون الجدول الآتى:

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \to q$	$p \to q \ \wedge \sim p$	$[(p \to q) \wedge \sim p] \to \sim q$
1	1	0	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	1	1	0	1

واضح من الجدول أن التقرير $(p \to q) \wedge (\sim p) \to (\sim q)$ غير صائب منطقيا.

إذن فهو محاجة زائفة.

٢-١٤ الأسوار Quantifiers

ليكن $p(x)$ تقريرا يتوقف صوابه على المتغير x. مثل هذا التقرير يسمى جملة مفتوحة *open sentence* ؛ فمثلا إذا كتبنا $x + 2 = 9$ فإن هذا التقرير يكون صحيحا أو خاطئا بعد أن نحدد ماهية x ؛ ولذلك لا نجزم بصحة التقرير ما لم يُقرن بأداة أو برمز يحدد المتغير x . هذه الأداة تسمى سور *quantifier*

سنعرف فيما يلي اثنين من هذه الأسوار:

٢-١٤-١ سور الوجود The Existential Quantifier

التقرير $(\exists x)(p(x))$ يعنى " توجد x بحيث $p(x)$ ". ويكون هذا التقرير المركب صائبا أو خاطئا.

مثال (١)

التقرير $(\exists x \in \mathrm{N})\ (x + 4 = 9)$ يقرأ: يوجد عدد طبيعى x بحيث $x + 4 = 9$

وهو تقرير صائب.

مثال (٢)

التقرير $(\exists x \in N)\ (x + 9 = 4)$ يقرأ: يوجد عدد طبيعى x بحيث $x + 9 = 4$ وهو تقرير خاطئ حيث أن x هنا سالبة.

٢-١٤-٢ سور العالمية (الكلية) The Universal Quantifier

التقرير $(\forall x)\ (p(x))$ يعنى " لكل x فإن $p(x)$ ". ويكون هذا التقرير المركب صائبا أو خاطئا.

مثال

التقرير $(\forall x > 0)\ (x + 1 > 1)$ يُقرأ "لجميع قيم x الموجبة فإن المقدار $x + 1$ يكون أكبر من 1" وهو تقرير صحيح.

٢-١٥ نفى الجمل التى تحتوى على أسوار Negation of Quantified Sentences

هناك قاعدتان لنفى الجمل التى تحتوى على أسوار. القاعدة الأولى هى:

$$\sim[(\exists x)(p(x))] \equiv [(\forall x)(\sim p(x))],$$

ومعناها: نفى التقرير" توجد x بحيث $p(x)$ " يكافئ التقرير "لكل x فإن $p(x)$ ليس صحيحا ".

والقاعدة الثانية هى:

$$\sim[(\forall x)(p(x))] \equiv [(\exists x)(\sim p(x))]$$

ومعناها: نفى التقرير " لكل x فإن $p(x)$ " يكافئ التقرير " توجد x بحيث لا يكون $p(x)$ صحيحا ".

مثال (١)

التقرير $(\forall x > 0)(x + 1 > 2)$ يعنى " لكل x الموجبة فإن $x + 1$ يكون أكبر

من 2 وهو تقرير خاطئ. أى أن التقرير $(\forall x > 0)(x + 1 > 2) \sim$ هو تقرير صائب. ويكافئ هذا أن نكتب: $(\exists x > 0)(\sim (x + 1 > 2))$. أى أنه يكفى أن نجد قيمه واحدة موجبة للمتغير x بحيث يكون التقرير $(x + 1 > 2)$ خاطئا (واضح أن القيمة $x = 1$ تحقق هذا).

مثال (٢)

التقرير $(\exists x \in N)(x + 7 = 4)$ يقرأ : "يوجد عدد طبيعى x بحيث يكون $x + 7 = 4$ " وهو تقرير خاطئ أى أن نفيه صحيح. ويكافئ ذلك أن نكتب $(\forall x \in N)(\sim (x + 7 = 4))$ ويقرأ : " لكل عدد طبيعى x فإن التقرير $(x + 7 = 4)$ لا يكون صحيحا ".

٢-١٦ المصفوفات المنطقية Logical Matrices

يقصد بالمصفوفات المنطقية المصفوفات التى جميع عناصرها تأخذ إحدى القيمتين 0 أو 1. أى أنها المصفوفات التى صورها:

$$A = [a_{ij}]_{m \times n} \ , a_{ij} = 0 \text{ or } 1 \quad \forall i = 1,2,...,m \ ; j = 1,2,...,n$$

والعمليات التى تجرى على تلك المصفوفات هى عمليات منطقية تسمى عمليات بوول *Boolean Operations* سنعرف منها ثلاث:

٢-١٦-١ الوصل The Join

لتكن $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ ، $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ مصفوفتين منطقيتين. تُعرف مصفوفة الوصل *Join matrix* بأنها المصفوفة $C = [c_{ij}]_{m \times n}$ حيث:

$$c_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{إذا كان كل من } a_{ij} \text{ ، } b_{ij} \text{ يساوى } 0 \\ 1, & \text{إذا كان أحد } a_{ij} \text{ أو } b_{ij} \text{ أو كلاهما يساوى } 1 \end{cases}$$

أى أن:

$$c_{ij} = a_{ij} \vee b_{ij}$$

ونكتب:

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \vee \mathbf{B}$$

مثال

لتكن:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

فإن:

$$\mathbf{A} \vee \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

٢-١٦-٢ الملتقى The Meet

لتكن $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{m \times n}$ ، $\mathbf{B} = [b_{ij}]_{m \times n}$ مصفوفتين منطقيتين. تُعرف مصفوفة الملتقى *Meet matrix* بأنها المصفوفة $\mathbf{D} = [d_{ij}]_{m \times n}$ حيث:

$$d_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{إذا كان كل من } a_{ij} \text{ ، } b_{ij} \text{ يساوى } 1 \\ 0, & \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

أى أن:

$$d_{ij} = a_{ij} \wedge b_{ij}$$

ونكتب:

$$\mathbf{D} = \mathbf{A} \wedge \mathbf{B}$$

مثال

فى المثال السابق نجد أن:

$$\mathbf{A} \wedge \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

٢- ١٦-٣حاصل الضرب The Product

لتكن $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{m \times n}$ ، $\mathbf{B} = [b_{ij}]_{n \times p}$ مصفوفتين منطقيتين. تُعرف مصفوفة الضرب *Product matrix* بأنها المصفوفة $\mathbf{E} = [e_{ij}]_{m \times p}$ حيث:

$$e_{ij} = \bigvee_{k=1}^{n} a_{ik} \wedge b_{kj}$$

ونكتب:

$$\mathbf{E} = \mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$$

مثال

لتكن: $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\qquad$ $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

فإن:

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (1\wedge1)\vee(1\wedge0)\vee(0\wedge1) & (1\wedge0)\vee(1\wedge1)\vee(0\wedge0) & (1\wedge0)\vee(1\wedge1)\vee(0\wedge1) & (1\wedge0)\wedge(1\wedge0)\wedge(0\wedge1) \\ (0\wedge1)\vee(1\wedge0)\vee(0\wedge1) & (0\wedge0)\vee(1\wedge1)\vee(0\wedge0) & (0\wedge0)\vee(1\wedge1)\vee(0\wedge1) & (0\wedge0)\wedge(1\wedge0)\wedge(0\wedge1) \\ (1\wedge1)\vee(1\wedge0)\vee(0\wedge1) & (1\wedge0)\vee(1\wedge1)\vee(0\wedge0) & (1\wedge0)\vee(1\wedge1)\vee(0\wedge1) & (1\wedge0)\wedge(1\wedge0)\wedge(0\wedge1) \\ (0\wedge1)\vee(0\wedge0)\vee(1\wedge1) & (0\wedge0)\vee(0\wedge1)\vee(1\wedge0) & (0\wedge0)\vee(0\wedge1)\vee(1\wedge1) & (0\wedge0)\wedge(0\wedge0)\wedge(1\wedge1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1\vee0\vee0 & 0\vee1\vee0 & 0\vee1\vee0 & 0\wedge0\wedge0 \\ 0\vee0\vee0 & 0\vee1\vee0 & 0\vee1\vee0 & 0\wedge0\wedge0 \\ 1\vee0\vee0 & 0\vee1\vee0 & 0\vee1\vee0 & 0\wedge0\wedge0 \\ 0\vee0\vee1 & 0\vee0\vee0 & 0\vee0\vee1 & 0\wedge0\wedge1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

هذا؛ ويكن إثبات القوانين الآتية للمصفوفات المنطقية طالما كانت العمليات المتضمنة سليمة:

(أ) $A \vee B = B \vee A$ ، $A \wedge B = B \wedge A$

(ب) $A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C$ ، $A \wedge (B \wedge C) = (A \wedge B) \wedge C$

(ج) $A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ ، $A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ ،

$(A \vee B) \wedge C = (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$ ، $(A \wedge B) \vee C = (A \vee C) \wedge (B \vee C)$

(د) $A \otimes (B \otimes C) = (A \otimes B) \otimes C$

أمثلة متنوعة

مثال (١)

أثبت أن التقرير $p \rightarrow q$ يكون صائبا إذا وفقط إذا كان التقرير $p \wedge (\sim q)$ خاطئا.

الحــــل

نكون الجدول:

p	q	$\sim q$	$p \rightarrow q$	$p \wedge \sim q$	$\sim[p \wedge \sim q]$	$p \rightarrow q \leftrightarrow \sim[p \wedge \sim q]$
1	1	0	1	0	1	1
1	0	1	0	1	0	1
0	1	0	1	0	1	1
0	0	1	1	0	1	1

من العمود الأخير يتضح أن $p \rightarrow q \equiv \sim (p \wedge \sim q)$. إذن المطلوب صحيح.

مثال (٢)

أثبت أن $\sim (p \wedge q) \Leftrightarrow p \rightarrow \sim q$.

الحــــل

نكون الجدول:

p	q	$\sim q$	$p \wedge q$	$\sim (p \wedge q)$	$p \rightarrow \sim q$
1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	1	1
0	1	0	0	1	1
0	0	1	0	1	1

من تطابق العمودين الأخيرين ينتج المطلوب.

مثال (٣)

أثبت أن التقرير $(p \vee q) \wedge (q \rightarrow \sim r) \wedge \sim p$ خاطئ منطقيا.

الحـــل

نكون الجدول:

p	q	r	$\sim r$	$\sim p$	$p \vee q$	$q \rightarrow \sim r$	$(p \vee q) \wedge (q \rightarrow \sim r) \wedge (\sim p)$
1	1	1	0	0	1	0	0
1	1	0	1	0	1	1	0
1	0	1	0	0	1	1	0
1	0	0	1	0	1	1	0
0	1	1	0	1	1	0	0
0	1	0	1	1	1	0	0
0	0	1	0	1	0	1	0
0	0	0	1	1	0	1	0

من العمود الأخير يتضح أن $(p \vee q) \wedge (q \rightarrow \sim r) \wedge \sim p \equiv F$.

مثال (٤)

أثبت أن:

$$(p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \sim r) \vee (p \wedge \sim q \wedge r) \vee (\sim p \wedge q \wedge \sim r)$$

$$\equiv (p \wedge r) \vee (q \wedge \sim r)$$

الحـــل

نكون الجدول:

p	q	r	$\sim p$	$\sim q$	$\sim r$	$p \wedge r$	$q \wedge \sim r$
1	1	1	0	0	0	1	0
1	1	0	0	0	1	0	1
1	0	1	0	1	0	1	0
1	0	0	0	1	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0	0
0	1	0	1	0	1	0	1
0	0	1	1	1	0	0	0
0	0	0	1	1	1	0	0

ومنه نستنتج الجدول:

$p \wedge q \wedge r$	$p \wedge \sim q \wedge r$	$p \wedge q \wedge \sim r$	$\sim p \wedge q \wedge \sim r$	L.H.S.	R.H.S.
1	0	0	0	1	1
0	0	1	0	1	1
0	1	0	0	1	1
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	1	1
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0

حيث يمثل العمودان الأخيران الطرفان الأيسر والأيمن من التكافؤ.من تطـــابق العمودين الأخيرين ينتج المطلوب.

طريقة أخرى للحل

$(p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \sim q \wedge r) \equiv ((p \wedge r) \wedge q) \vee ((p \wedge r) \wedge \sim q)$

(قوانين الدمج والإبدال)

$\equiv (p \wedge r) \wedge (q \vee \sim q)$

(قوانين التوزيع)

$\equiv (p \wedge r) \wedge \mathrm{T}$

(قوانين F ، T)

$$\equiv p \wedge r$$

(قوانين F ، T)

$$(p \wedge q \wedge \sim r) \vee (\sim p \wedge q \wedge \sim r) \equiv (p \wedge (q \wedge \sim r) \vee (\sim p \wedge (q \wedge \sim r))$$

(قوانين الدمج والإبدال)

$$\equiv (p \vee \sim p) \wedge (q \wedge \sim r)$$

(قوانين التوزيع)

$$\equiv T \wedge (q \wedge \sim r)$$

(قوانين F ، T)

$$\equiv q \wedge \sim r$$

(قوانين F ، T)

إذن:

$$(p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \sim q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \sim r) \vee (\sim p \wedge q \wedge \sim r) \equiv (p \wedge r) \vee (q \wedge \sim r)$$

مثال (٥)

أثبت القاعدة الآتية:

$$\sim [(\forall x)(\exists y)(p(x,y))] \equiv [(\exists x)(\forall y)(\sim p(x,y))]$$

الحـــــل

واضح أن كلا من الطرف الأيمن والأيسر جملة مفتوحة فى متغيرين x ، y. إذا اعتبرنا أن المتغير y ثابت فى الجملتين فإن علينا أن نثبت أن:

$$\sim [(\exists x)(p(x,b)] = (\forall x)(\sim p(x,b))$$

وهى نفس القاعدة الأساسية الأولى فى نفى الجمل المفتوحة (لاحظ أننا أسقطنا الأسوار من المتغير y حيث اعتبرناه ثابتا).

وبالمثل اذا اعتبرنا المتغير x ثابتا فإن علينا أن نثبت أن:

$$\sim (\forall y)(p(a, y)) = (\exists y)(\sim p(a, y))$$

وهى نفس القاعدة الأساسية الثانية:

$$\sim (\forall x)(p(x)) = (\exists x)(\sim p(x))$$

فى نفى الجمل المفتوحة (لاحظ أننا أسقطنا الأسوار من المتغير x حيث اعتبرناه ثابتا). إذن القاعدة صحيحة.

مثال (٧)

لأى مجموعتين A ، B أثبت أن $(A \cap B) \subset A \subset (A \cup B)$.

الحـــــل

نكوّن جدول الانتماء ونكمله بعمودين لقيم الحقيقة كالآتى:

A	B	$A \cap B$	$A \cup B$	$(A \cap B) \subset A$	$A \subset (A \cup B)$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1
0	1	0	1	1	1
0	0	0	0	1	1

نلاحظ من العمودين الثالث والأول من الجدول أنه إذا إنتمـــــى العنصـــر إلى $A \cap B$ فإنه ينتمى أيضا إلى A. لذا فإن قيم الحقيقة فى العمود الخامس كلـــــها 1.ولهـــذا يعتبر رأس هذا العمود قانونا فى حد ذاته،وكذلك بالنسبة للعمــــود السادس.

مثال (٨)

إذا كانت $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ فاوجد كلا من $A \vee B$ ، $A \wedge B$ ، $A \otimes B$ ، $B \otimes A$.

الحـــل

$$A \vee B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \vee \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0\vee 0 & 0\vee 1 & 1\vee 1 \\ 1\vee 1 & 1\vee 1 & 0\vee 0 \\ 1\vee 1 & 0\vee 0 & 0\vee 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A \wedge B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0\wedge 0 & 0\wedge 1 & 1\wedge 1 \\ 1\wedge 1 & 1\wedge 1 & 0\wedge 0 \\ 1\wedge 1 & 0\wedge 0 & 0\wedge 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0\vee 0\vee 1 & 0\vee 0\vee 0 & 0\vee 0\vee 1 \\ 0\vee 1\vee 0 & 1\vee 1\vee 0 & 1\vee 0\vee 0 \\ 0\vee 0\vee 0 & 1\vee 0\vee 0 & 1\vee 0\vee 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B \otimes A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \vee 1 \vee 1 & 0 \vee 1 \vee 0 & 0 \vee 0 \vee 0 \\ 0 \vee 1 \vee 0 & 0 \vee 1 \vee 0 & 1 \vee 0 \vee 0 \\ 0 \vee 0 \vee 1 & 0 \vee 0 \vee 0 & 1 \vee 0 \vee 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

نلاحظ أن $B \otimes A$ لا يساوى $A \otimes B$.

تمـــــــرين (٢)

١. بيّن أى من الجمل الآتية تقرير وأيها ليس كذلك.

(أ) أصلح السيارة.

(ب) أصلح الميكانيكى السيارة.

(ج) القمر ظاهر الآن.

(د) العود من الآلات الوترية.

(هـ) اللوحة يغلب عليها اللون الأحمر.

(و) زد من اللون الأصفر فى اللوحة.

(ز) أين مفتاح الخريطة؟

(ح) كم مقياس الرسم؟

(ط) الأورج الالكترونى آلة موسيقية متعددة.

(ى) $4 + 3 = 8$

(ك) حل المعادله $7x + 6 = 8$.

(ل) يوجد عدد نسبى x بحيث $x + 2 = 6$.

(م) ينبغى وقاية الأطعمة من الفساد.

٢. جزِّىء الجمل الآتية إلى تقارير أولية مبينا أدوات الوصل:

(أ) إذا لمع المعدن فهو ذهب.

(ب) إذا وافق مجلس الشعب على قانون الضرائب فإن العداله تتحقق ويزيد الانتاج.

(ج) غير صحيح أن التضخم سيستمر وستزيد البطاله.

(د) إذا كانت النفوس كبارا تعبت فى مرادها الأجسام.

(هـ) إذا أمطرت السماء فإنه يوجد سحاب.

(و) التعليم الجيد يستلزم مدرسا كفؤا وطالبا مجدا.

(ز) إن الله لا ينظر إلى صوركم ولكن ينظر إلى قلوبكم.

(ح) لا يستقيم الظل والعود أعوج.

(ط) إذا لم يتوفر لى وقت فى الكمبيوتر فلن أتم مشروعى.

(ى) إذا خفت فلا تقل وإن قلت فلا تخف.

٣. عبر عن الجملة الآتية بالرمز:

"إذا زاد دخل الشركة عن خمسين ألف جنيه و لم تزد نسبة الانفاق عن ٥٠؟ من الدخل فإنه يمكن تعيين موظفين". هل تعتبر هذه الجملة محاجة؟

٤. قال المرشح "إذا انتُخبت فسيتم عمل كوبرى يصل بين شقى البلدة". متى يكون هذا التقرير خاطئا؟

٥. أى من التقارير الآتية تضمين؟

(أ) $(p \wedge q) \to \sim q$

(ب) $\sim (p \vee q) \to p$

(ج) $[(p \vee q) \wedge \sim r] \to p$

(د) $p \to [(p \wedge q) \wedge \sim r]$

٦. أى من التقارير الآتية تكافؤ؟

(أ) $[p \wedge (p \vee q)] \leftrightarrow p$

(ب) $[p \vee (p \wedge q)] \leftrightarrow p$

(ج) $(q \wedge \sim p) \leftrightarrow (\sim q \vee p)$

(د) $(\sim p \vee q) \leftrightarrow (\sim q \wedge p)$

٧. أثبت صحة كل من القوانين الآتية:

(أ) $\sim (p \to q) \Leftrightarrow (p \wedge \sim q)$

(ب) $[(p \to q) \wedge \sim q] \Rightarrow \sim p$

(ج) $[\sim p \wedge (p \vee q)] \Rightarrow q$

(د) $[(p \to q) \wedge p] \Rightarrow q$

(هـ) $(p \to q) \Leftrightarrow (\sim p \vee q)$

(و) $(p \to q) \Rightarrow [(p \wedge r) \to (q \wedge r)]$

٨. أثبت أن كلا من التقارير الآتية صائب منطقيا:

(أ) $\sim (p \vee q) \vee (\sim p \vee q) \vee p$

(ب) $(p \vee q) \wedge [\sim p \wedge (p \vee \sim q)] \wedge (\sim p \vee q)$

(ج) $[(p \to q) \to (\sim q \to \sim q)] \to$
$[(\sim q \to \sim p) \to (p \to q)]$

٩. أثبت أن $[(p \vee q) \wedge \sim p] \wedge [\sim p \to \sim q] \Rightarrow p$

١٠. أثبت أن:

(أ) $[(\forall p)(p \vee x) \equiv p] \Rightarrow x \equiv \mathrm{F}$

(ب) $[(\forall p)(p \wedge x) \equiv p] \Rightarrow x \equiv \mathrm{T}$

١١. أثبت القاعدة الآتية:

$\sim[(\exists x)(\forall y)(p(x,y))] = [(\forall x)(\exists y)(\sim p(x,y))]$

١٢. يراد تشكيل قوة دولية لحفظ السلام فى منطقة ما. فإذا رشحت خمس دول P,Q,R,S,W لتشكيل هذه القوه فجاءت اشتراطات هذه الدول للاشتراك فى هذه القوة كالآتى:

(ا) لا يمكن اشتراك R ، Q مع بعضهما.

(ب) لا يمكن اشتراك Q ، S مع بعضهما.

(ج) لا يمكن اشتراك R ، W مع بعضهما.

(د) اشترطت P ألا تشترك إلا إذا اشتركت W.

(هـ) ضرورة اشتراك P أو Q.

(و) ضرورة اشتراك R أو S.

فماذا يكون تشكيل القوة فى ظل تلك الاشتراطات؟

١٣. إذا كانت $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ فاوجد كلا من

$A \vee B$ ، $A \wedge B$ ، $A \otimes B$ ، $B \otimes A$.

١٤. أثبت القوانين الآتية:

(أ) $A \vee B = B \vee A$ ، $A \wedge B = B \wedge A$

(ب) $A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C$ ،

$A \wedge (B \wedge C) = (A \wedge B) \wedge C$

(ج) $\boxed{A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)}$

(د) $(A \wedge B) \vee C = (A \vee C) \wedge (B \vee C)$

(هـ) $A \otimes (B \otimes C) = (A \otimes B) \otimes C$

الباب الثالث

نظرية المفاتيح

SWITCHING THEORY

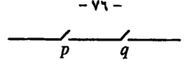
٣-١ تقـــــديم

معلوم أن المفتاح *switch* هو جهاز يستخدم فى توصيل وفصل التيار الكـــهربى ويكون فى أحد وضعين: الوضع الأول موصل للتيار والوضع الثـــانى فـــاصل للتيار. ولا يمكن للمفتاح أن يأخذ الوضعين معا. سنتفق على أن نرمز للتقرير المفتاح p موصل بالرمز p وللتقرير المفتاح p غير موصل بالرمز p' ؛ وإذا كان المفتاح p موصلا فإنه يأخذ القيمه 1، وعندما يكون p غير موصل فانه يـــأخذ القيمة 0.

وقد يتساءل القارى عن فائدة دراسة نظرية المفاتيح لغير المتخصص فى الكهرباء والإلكترونيات! فى الواقع فإن مفهوم المفتاح يمكن أن يمتد ليشمل عددا غـــير قليل من التطبيقات كما سيتضح فيما بعد.

٣-٢ التوصيل على التوالى Connection in Series

يقال لمفتاحين p ، q أنهما موصلان على التوالى عندما يمر التيار الكـــهربى فى الدائره عندما يكون كل من المفتاحين p ، q فى وضع التوصيل ولا يمر التيـــار الكهربى فى أى حالة أخرى (أنظر شكل ٣-١).



شكل ٣-١

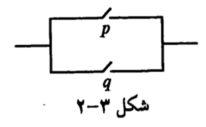
ويكون الجدول الذى يمثله مخرج *output* هذه الدائرة x كما يلى:

p	q	x
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

وهذا الجدول يطابق تماما جدول الحقيقة للتقرير $p \wedge q$ بوضع $x = p \wedge q$. لذا سنرمز للتوصيل على التوالى بالرمز $p \wedge q$ ويقرأ "p على التوالى مع q".

٣-٣ التوصيل على التوازى Connection in Parallel

يقال لمفتاحين p ، q أنهما موصلان على التوازى إذا مر التيار فى الدائرة عندما يوصل أحد المفتاحين على الأقل (أنظر شكل ٣-٢).



شكل ٣-٢

ويكون الجدول الذى يمثله مخرج *output* هذه الدائرة x كما يلى:

p	q	x
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

وهذا الجدول يطابق تماما جدول الحقيقة للتقرير $p \vee q$ بوضع $x = p \vee q$. لذا سنرمز للتوصيل على التوازى بالرمز $p \vee q$ ويقرأ "p على التوازى مع q".

وإذا كان لدينا ثلاثة مفاتيح p ، q ، r موصَّلة على التوالى كمـــا فى شكـــل ٣-٣:

p q r

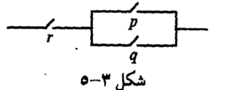
شكل ٣-٣

فإننا نرمز لذلك بالرمز $p \wedge q \wedge r$ (حيث أن قانون الدمج فى المنطـــق قـــابل للتطبيق)؛ أما إذا كانت المفاتيح p ، q ، r موصَّلة على التوازى فإننـــا نرمـــز لذلك بالرمز $p \vee q \vee r$ (أنظر شكل ٣-٤):

p
q
r

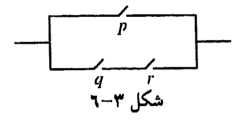
شكل ٣-٤

والتركيبه $(q \vee r) \wedge p$ تمثّل الدائرة الآتية (شكل٣-٥):



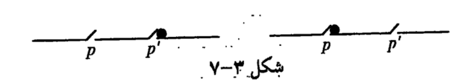
شكل ٣-٥

أما التركيبة $p \vee (q \wedge r)$ فتمثل الدائرة الآتية (شكل ٣-٦):



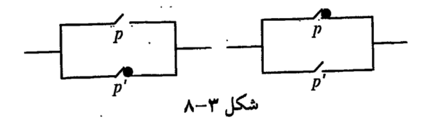
شكل ٣-٦

وفى الدوائر السابقة تعمل المفاتيح p ، q ، r مستقلة عن بعضها البعض أى أن وضع أحدها لا يؤثر على الآخرين من حيث التوصيل وعدم التوصيل ولكن هذا لا يحدث دائما؛ فقد يحدث أن يكون هناك مفتاحان (أو أكثر) يتصرفان بطريقة واحدة، وفى هذه الحالة سنرمز لهما بنفس الرمز أى p ، p ؛ وقد يحدث أن يتصرف مفتاحان بطريقة معاكسة، أى اذا كان أحدهما موصل فالآخر يكون غير موصل والعكس بالعكس ، وفى هذه الحالة سنرمز للمفتاحين بالرمزين p ، p' ؛ فإذا كان p ، p' متصلان على التوالى فإن التيار لا يمكن أن يمر بالدائرة (أنظر شكل ٣-٧):



شكل ٣-٧

[لاحظ أن $F = (p \wedge p')$]. أما إذا كان p ، p' موصلان على التوازى فإن التيار دائما يمر بالدائرة (أنظر شكل ٣-٨).



شكل ٣-٨

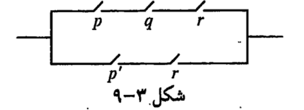
[لاحظ أن $(p \vee p') = T$].

٣-٤ تبسيط الدوائر Simplification of Circuits

يمكن تبسيط الدوائر باستخدام جبر المنطق كما يلي:

مثال (١)

عبّر عن الدائرة الآتية (شكل ٣-٩) بالرمز، ثم بسط الدائرة وارسمـــها بعــد تبسيطها:



شكل ٣-٩

الحـــل

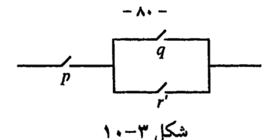
المفاتيح p ، q ، r موصّلة على التوالى والمفتاحان p' ، r موصّلين على التـــوالى والمجموعتان p ، q ، r ؛ p' ، r موصّلتين على التوازى. إذن المكافىء المنطقى للدائرة هو:

$$x \equiv (p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge r')$$

باستخدام جبر المنطق نجد أن:

$$(p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge r') \equiv [p \wedge (q \wedge r)] \vee (p \wedge r') \quad \text{(قانون الدمج)}$$
$$\equiv p \wedge [(q \wedge r) \vee r'] \quad \text{(قانون التوزيع)}$$
$$\equiv p \wedge [(q \vee r') \wedge (r \vee r')] \quad \text{(قانون التوزيع)}$$
$$\equiv p \wedge [(q \vee r') \wedge T] \quad \text{(قانونا F ، T)}$$
$$\equiv p \wedge (q \vee r') \quad \text{(قانونا F ، T)}$$

أى أن الدائرة الأصلية تكافىء الدائرة الآتية (شكل ٣-١٠):

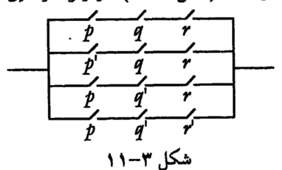


شكل ٣-١٠

والدائرة الأخيرة المكافئة بسيطة واقتصادية حيث أنها تحتوى على ثلاثة مفاتيح بدلا من خمسة.

مثال (٢)

عبر عن الدائرة الآتية (شكل ٣-١١) بالرمز واختزلها إلى دائرة أبسط:



شكل ٣-١١

الحـــــل

الدائرة تكافىء:

$$x \equiv (p \wedge q \wedge r) \vee (p' \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q' \wedge r) \vee (p \wedge q' \wedge r')$$
$$\equiv [(p \wedge q \wedge r) \vee (p' \wedge q \wedge r)] \vee [(p \wedge q' \wedge r) \vee (p \wedge q' \wedge r')]$$

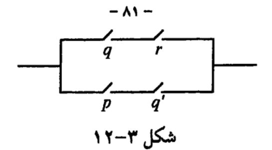
(قانون الدمج)

(قانون التوزيع) $\equiv \; [(p \vee p') \wedge (q \wedge r)] \vee [(p \wedge q') \wedge (r \vee$

(قانونا F، T) $\equiv \; [T \wedge (q \wedge r)] \vee [(p \wedge q') \wedge T]$

(قانونا F، T) $\equiv \; (q \wedge r) \vee (p \wedge q')$

وبذلك نكون قد اختزلنا الدائرة ذات الإثنى عشر مفتاحا إلى الدائـــرة الآتيـــة ذات الأربعة مفاتيح (شكل ٣-١٢):



شكل ٣-١٢

٣-٥ استخدام الأشكال الرمزية فى نظرية المفاتيح

درج علماء الهندسة الإلكترونية حديثا على استخدام أشكال ترمز إلى توصيل المفاتيح على التوازى والتوالى وهى تسهل كثيرا من العمل وتؤدى إلى اختزال الدوائر وهذه الأشكال هى:

(أ) شكل ٣-١٣ يرمز لتوصيل p ، q على التوالى:

p
q
AND
$p \wedge q$

شكل ٣-١٣

(ب) شكل ٣-١٤ يرمز لتوصيل p ، q على التوازى:

p
q
OR
$p \vee q$

شكل ٣-١٤

(ج) شكل ٣-١٥ يرمز لتوصيل p':

p
NOT
p'

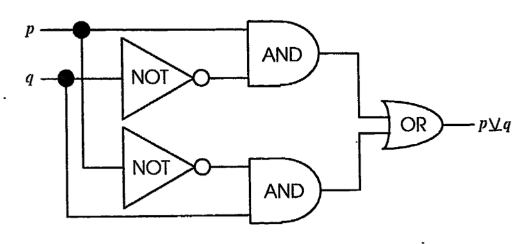
شكل ٣-١٥

(د) شكل ٣-١٦ يرمز إلى $p \veebar q$ أى إلى $(p \wedge q') \vee (p' \wedge q)$:



شكل ٣-١٦

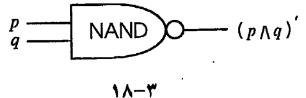
أى أننا نستعيض بهذا الشكل عن الدائرة المبينة بشكل ٣-١٧:



شكل ٣-١٧

وقد اصطلح أيضا على استخدام الشكلين الآتيين:

(هـ) الشكل ٣-١٨ يرمز إلى $(p \wedge q)'$:



١٨-٣

(و) الشكل ٣-١٩ يرمز إلى $(p \vee q)'$:

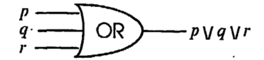
شكل ٣-١٩

هذا، ويمكن زيادة عدد الأطراف الداخله للشكل كما يلى:

(ز) الشكل ٣-٢٠ يرمز لتوصيل p ، q ، r على التوالى:

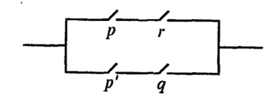
شكل ٣-٢٠

(ح) الشكل ٣-٢١ يرمز لتوصيل p ، q ، r على التوازى:



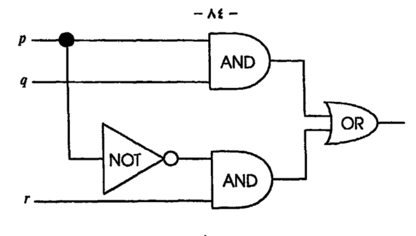
شكل ٣-٢١

ويمكن أيضا إدماج اثنين أو أكثر من هذه الأشكال فى شكل واحد؛ فـــالدائرة المبينة بالشكل ٣-٢٢:



شكل ٣-٢٢

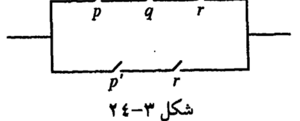
يمكن التعبير عنها بالشكل ٣-٢٣:



شكل ٣-٢٣

مثال (١)

عبر عن الدائرة الآتية (شكل ٣-٢٤) بالأشكال الرمزية:



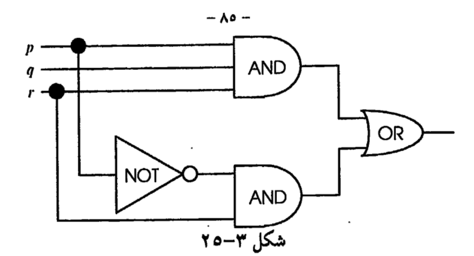
شكل ٣-٢٤

الحـــــل

المكافئ المنطقى للدائره هو:

$x \equiv (p \wedge q \wedge r) \vee (p' \wedge r)$

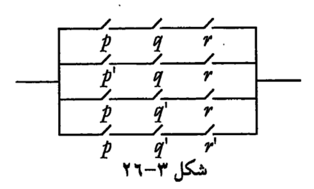
ويعبر عنها بالأشكال الرمزية كالآتى (شكل ٣-٢٥):



شكل ٣-٢٥

مثال (٢)

عبِّر عن الدائرة الآتية (شكل ٣-٢٦) بالأشكال الرمزية:



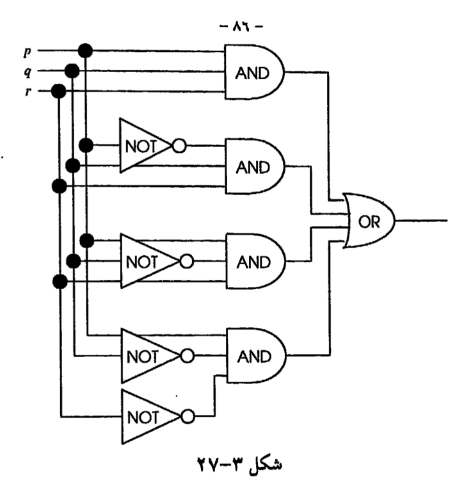
شكل ٣-٢٦

الحـــــل

المكافىء المنطقى للدائرة هو:

$$x \equiv (p \wedge q \wedge r) \vee (p' \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q' \wedge r) \vee (p \wedge q' \wedge r')$$

ويعبَّر عنها بالأشكال الرمزية كالآتى (شكل ٣-٢٧):



شكل ٣-٢٧

٣-٦ خرائط كارنوف لاختزال الدوائر Karnau Maps

تعتبر خرائط كارنوف طريقة سهلة ومبسطة لاختزال الدوائر. وهـــى تعتمـــد أساسا على جبر Bool وقوانين المنطق. وقبـــل أن نـــدرس تلـــك الخرائـــط سنصطلح على كتابة التقرير $p \vee q$ بالصورة $p + q$ والتقرير $p \wedge q$ بـــالصورة pq وسنستبدل علامة التكافؤ"≡" بالعلامة "=" وسنطبق هذه الاصطلاحـــات على أى تقرير مركب يحتوى على ثلاثة أو اكثر من التقارير البسيطة؛ فمثـــلا التعبير:

$$x = pq + p'q + p'q'$$

سيرمز للتقرير المركب:

$$x \equiv (p \wedge q) \vee (\sim p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$$

الذى يمكن تبسيطه باستخدام قوانين المنطق كالآتى:

$$\begin{aligned} x &\equiv (p \wedge q) \vee [\sim p \wedge (q \vee \sim q)] \\ &\equiv (p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \mathrm{T}) \\ &\equiv (p \wedge q) \vee \sim p \\ &\equiv (p \vee \sim p) \wedge (q \vee \sim p) \\ &\equiv \mathrm{T} \wedge (q \vee \sim p) \\ &\equiv q \vee \sim p \end{aligned}$$

بكتابة التقرير x بالصورة:

$$x = pq + p'q + p'q'$$

فإننا يمكن أن نختزله كالآتى:

$$\begin{aligned} x &= pq + p'(q + q') \\ &= pq + p' \cdot 1 \\ &= pq + p' \\ &= (p + p')(q + p') \qquad ! \end{aligned}$$

ويلاحظ أننا هنا استخدمنا جبر Bool الذى فيه العملية "+" (أى " V ") متوزعه على العملية "." (أى " Λ "). وحيث أن هذا يخالف قواعد جبر الأعداد الحقيقية التى تعودنا عليها فإنه يحسن استخدام خرائط كارنوف فى الاختزال كالآتى (شكل ٣-٢٨):

	q	q'
p	pq	pq'

p'	$p'q$	$p'q'$

شكل ٣-٢٨

ويوقع التقرير:

$$x = pq + p'q + p'q'$$

على الخريطة السابقة كالآتى (شكل ٣-٢٩):

	q	q'
p	×	
p'	×	×

شكل ٣-٢٩

وفى هذه الخريطة يختزل العمود الرأسى إلى المفتاح الذى عنـــد رأس العمـــود (أى q)، أما الصف الأفقى فيختزل إلى المفتاح الذى عند يساره (أى p'). أى أن:

$$x = p' + q$$

وتظهر قيمة خرائط كارنوف عندما تحتوى الدائرة أكثر من مفتاحين مستقلين. وللتعامل مع ثلاثة مفاتيح مستقلة p ، r ، q نستخدم خريطة كارنوف بالشكل الآتى (شكل ٣-٣٠):

	qr	qr'	$q'r'$	$q'r$
p	pqr	pqr'	$pq'r'$	$pq'r$
p'	$p'qr$	$p'qr'$	$p'q'r'$	$p'q'r$

شكل ٣-٣٠

مثال (١)

اختزل الدائرة الممثلة بالتقرير:

$$x = p\,q\,r + p\,q\,r' + p'q\,r' + p\,q'r$$

الحـــــل

نوقع تلك الدائرة على خريطة كارنوف كالآتى (شكل ٣-٣١):

	qr	qr'	$q'r'$	$q'r$
p	X	X		X
p'		X		

شكل ٣-٣١

وفى هذه الخريطة اختزلنا العمود إلى رأسه $q\ r'$ أما الصف فيختزل إلى $p\ r$ ،
حيث p هو دليل الصف، r الرمز المشترك بين $q\,r$ ، $q'\,r$. إذن:

$$x = pr + qr'$$

لنفرض الآن أننا اختزلنا الدائرة كالآتى (شكل ٣-٣٢):

	qr	qr'	$q'r'$	$q'r$
p	X	X		X
p'		X		

شكل ٣-٣٢

أى أن:

$$x = pr + qr' + pq$$

أى أننا حصلنا على الحد pq علاوة على الحدين السابقين. باستخدام جبر Bool فإن:

$$x = pr(q + q') + qr'(p + p') + pq(r + r')$$
$$= prq + prq' + qr'p + qr'p' + pqr + pqr'$$

نلاحظ أن الحد الخامس هو تكرار للحد الأول والحد السادس هو تكرار للحد الثالث. وباستخدام قانون اللانمو $y + y = y$ فإن:

$$x = prq + prq' + qr'p + qr'p' = pr(q + q') + qr'(p + p')$$
$$= pr + qr'$$

وهى نفس نتيجة الاختزال السابقة.

مثال (٢)

اختزل الدائرة الممثلة بالتقرير:

$$x = pqr + pqr' + pq'r + p'qr + p'q'r$$

الحـــل

نوقّع الدائرة على خريطة كارنوف كالآتى (شكل ٣-٣٣):

	qr	qr'	$q'r'$	$q'r$
p	X	X		X
p'	X			X

شكل ٣-٣٣

فى هذه الخريطة يختزل العمود الأول إلى qr ويختزل العمود الرابع إلى $q'r$ ؛ أما الخانة pqr' فتختزل مع جارها pqr إلى pq . أى أن:

$$x = qr + q'r + pq = (q + q')r + pq = r + pq$$

مثال (٣)

اختزل الدائرة الممثلة بالتقرير:

$$x = p\,q\,r + p\,q\,r' + p'q\,r' + p'q'\,r' + p'\,q'\,r$$

الحـــــل

نوقع الدائرة على خريطة كارنوف كالآتى (شكل ٣-٣٤):

	qr	qr'	$q'r'$	$q'r$
p	X	X		
p'		X	X	X

شكل ٣-٣٤

وهنا فإن لدينا أحد الإختيارين الآتيين:

إما الإختيار الموضح بالشكل ٣-٣٥:

	qr	qr'	$q'r'$	$q'r$
p	X	X		
p'		X	X	X

شكل ٣-٣٥

وهذا يؤدى إلى الإختزال:

$$x = pq + p'r' + p'q'$$

أو الإختيار الموضح بالشكل ٣-٣٦:

	qr	qr'	$q'r'$	$q'r$
p	X	X		
p'		X	X	X

شكل ٣-٣٦

وهذا يؤدى إلى الإختزال:

$$x = pq + qr' + p'q'$$

أما إذا أخذنا الاختيار الموضح بالشكل ٣-٣٧:

	qr	qr'	$q'r'$	$q'r$
p	X	X		
p'		X	X	X

شكل ٣-٣٧

فإن الدائرة تختزل إلى:

$$x = p\,q + q\,r' + p'\,r' + p'\,q'$$

وهذا الإختزال يحتوى حدا زائدا كما يتضح من التحليل الآتى:

$$\begin{aligned} p\,q + q\,r' + p'\,r' + p'\,q' &= p\,q(r + r') + (p + p')\,q\,r' \\ &\quad + p'(q + q')r' + p'\,q'(r + r') \\ &= p\,q\,r + p\,q\,r' + p\,q\,r' + p'\,q\,r' \\ &\quad + p'\,q\,r' + p'\,q'\,r' + p'\,q'\,r + p'\,q'\,r' \end{aligned}$$

الحد الثالث يمكن شطبه لأنه تكرار للحد الثانى، والحد الرابع يمكن شطبه لأنه تكرار للحد الخامس ؛ وهذا يعنى أن الحد $q\,r'\,(\,p + p'\,)$ (أى qr') زائد.
إذن:

$$x = p\,q + p'r' + p'q'$$

وهذا بالضبط ما حصلنا عليه فى الإختيار الأول.

كذلك الحد الخامس يمكن شطبه لأنه تكرار للحد الرابع، والحد السادس يمكن شطبه لأنه تكرار للحد الثامن ؛ وهذا يعنى أن الحد $p'\,(\,q + q'\,)\,r'$ (أى $p'r'$) زائد. إذن:

$$x = p\,q + q\,r' + p'q'$$

وهذا بالضبط ما حصلنا عليه فى الإختيار الثانى.

٣-٧ تطبيقات متنوعة على نظرية المفاتيح

سنطبق الآن نظرية المفاتيح وخرائط كارنوف على بعض الأمثلة العملية:

مثال (١)

مصعد يُعمِّل بين طابقين وفى كل طابق مفتاح استدعاء للمصعد. صمم دائرة بحيث يفتح باب المصعد (وبالطبع الباب الموجود بالطابق) إذا ضغطنا أحد المفتاحين وكان المصعد موجودا فى الطابق المناظر لذلك المفتاح.

الحل

نفرض أن p ، q هما مفتاحـــا الاســتدعاء فى الطابقين الأول , الثانى على الترتيب ونفرض أن r هو المفتاح الأتوماتيكى الذى يبـــين موضـــع المصعد ونفرض أنه يكون موصلاً عندما يكـــون المصعد فى الطابق الأول وغير موصل عندما يكون المصعد فى الطابق الثـــانى. إذن ســيكون جدول المخرج للمفاتيح الثلاثة كما هو مبـــين. ويتضح من الجدول أن الدائرة التى تتحكـــم فى فتح باب المصعد تكافىء التقرير:

p	q	r	x
1	1	1	1
1	1	0	1
1	0	1	1
1	0	0	0
0	1	1	0
0	1	0	1
0	0	1	0
0	0	0	0

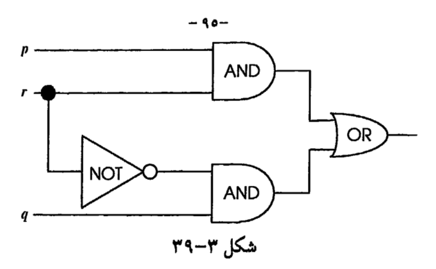
$$x = p\,q\,r + p\,q\,r' + p\,q'r + p'q\,r'$$

وباستخدام خريطة كارنوف (شكل ٣-٣٨):

	qr	qr'	$q'r'$	$q'r$
p	X	X		X
p'		X		

شكل ٣-٣٨

فإن الدائرة تختزل إلى $x = p\,r + q\,r'$ وهى تحتوى على ثلاثة مفاتيح (أنظـــر شكل ٣-٣٩):



شكل ٣-٣٩

مثال (٢)

صاله كبيرة تضاء أنوارها من ثلاثة مفاتيح موضوعة على ثلاثة أبواب مختلفة. صمم دائرة بحيث تضاء الصالة عند الدخول من أحد الأبواب (بفرض أنها كانت مطفأة) وتطفأ عند الخروج من أى باب (بفرض أنها كانت مضاءة).

الحل

نكوّن جدول المخرج (مع ملاحظة أن الصالة تكون مضاءة إذا استخدمنا عددا فرديا من المفاتيح وتكون مطفأة إذا استخدمنا عددا زوجيا من المفاتيح). واضح من الجدول أن الدائرة التى تتحكم فى انارة الصالة تكافىء التقرير:

p	q	r	x
1	1	1	1
1	1	0	0
1	0	1	0
1	0	0	1
0	1	1	0
0	1	0	1
0	0	1	1
0	0	0	0

$$x = p\,q\,r + p\,q'r' + p'q\,r' + p'q'\,r$$

نرسم خريطة كارنوف لتلك الدائرة كالآتى (شكل ٣-٤٠):

	qr	qr'	$q'r'$	$q'r$
p	X		X	
p'		X		X

شكل ٣-٤٠

واضح أن هذه الخريطة لا تجدى فى اختزال للدائرة ولكن نستطيع أن نختزل الدائرة إذا كتبنا التقرير بالصورة:

$$x = p(q\ r + q'r') + p'(q\ r' + q'\ r)$$

نجد أن $(q\ r' + q'\ r)$ يكافئ $q \underline{\vee} r$ أما $(q\ r + q'r')$ فنستطيع أن نعالجه كالآتى:

$$(q\ r + q'r')' = (q\ r)'(q'r')' \quad \text{(قانون دى مورجان)}$$

$$= (q' + r')(q + r) \quad \text{(قانون دى مورجان)}$$

$$= (q + r)(q' + r') \quad \text{(قانون الإبدال)}$$

$$= q\,q' + q\,r' + r\,q' + r\,r' \quad \text{(قانون التوزيع)}$$

$$= \mathrm{F} + q\,r' + r\,q' + \mathrm{F} \quad \text{(قانون F)}$$

$$= q\,r' + q'\,r \quad \text{(قانون الإبدال)}$$

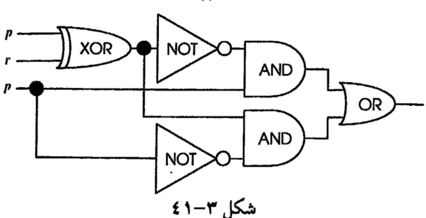
إذن:

$$q\ r + q'r' = (q\,r' + q'\,r)'$$

وعلى ذلك تختزل الدائرة إلى دائرة أبسط ممثلة بالتقرير الآتى:

$$x = p(q\,r' + q'\,r)' + p'(q\ r' + q'\ r)$$

وتكون الدائرة كما هو مبين بشكل ٣-٤١.



شكل ٣-٤١

مثال (٣)

كُسر زجاج نافذة فى فصل من الفصول ووجد المدرس أربعة تلاميذ فى الفصل فسألهم عن الفاعل فكانت الاجابات كالآتى:

أحمد : فعلها تامر.

تامر : أحمد كاذب.

سمير : أنا لم أفعلها.

شريف : فعلها أحمد.

فإذا علمت أن ثلاثة تلاميذ لا يقولون الصدق فمن تُرى كسر زجاج النافذة؟

الحـــــل

نفرض التقارير الآتية:

فعلها أحمد : p

فعلها تامر : q

فعلها سمير : r

فعلها شريف : s

وعلى ذلك تكون الإجابات هى q ، q' ، r' ، p . وحيث أن ثلاث إجابات خاطئة، إذن فإن لدينا أربع احتمالات هى:

أحمد وحده صادق [أى $q\ (q')'\ (r')'\ p'$] أو تامر وحده صادق [أى $q'q'(r')'p'$] أو سمير وحده صادق [أى $q'(q')'r'p'$] أو شريف وحده صادق [أى $q'\ (q')'\ (r')'p$]. إذن فالتقرير الذى يبين من الذى كسر زجاج النافذة هو:

$$x = q(q')'(r')'p' + q'q'(r')'p' + q'(q')'r'p' + q'(q')'(r')'p$$

$$= qqrp' + q'q'rp' + q'q\ r'p' + q'qrp$$

$$= qrp' + q'rp' + 0 + 0$$

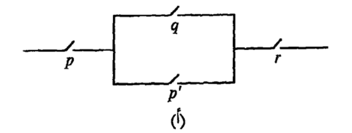
$$= (q + q')rp'$$

$$= rp'$$

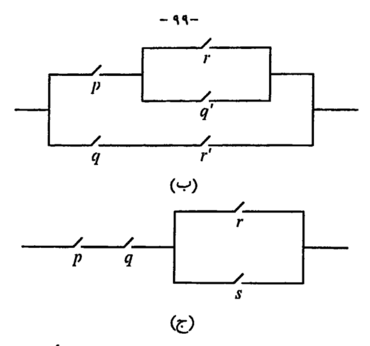
ويكون الإستنتاج المبنى على فرض أن ثلاثة لم يقولوا الصدق هو أن سمير فعلها وأحمد لم يفعلها !

تمارين (٣)

١ . عبِّر عن كل دائرة من الدوائر الآتية منطقيا وأعد رسم الدوائر مستخدما الأشكال الرمزية:



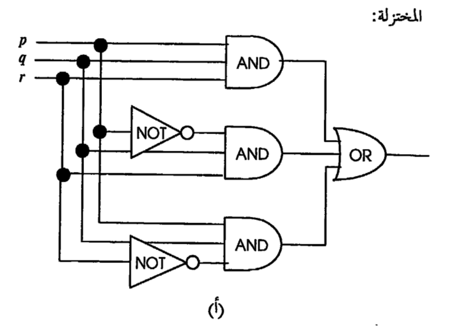
(أ)



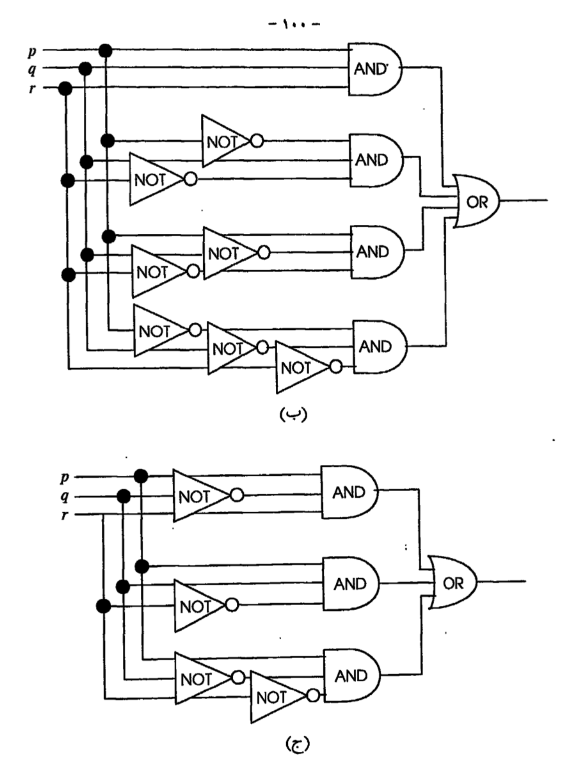
(ب)

(ج)

٢. عبِّر عن كل من الدوائر الآتية منطقيا واختزلها إلى دائرة أبسط وارسم الدائـــرة المختزلة:



(أ)


p
q
r
AND
NOT
AND
NOT
OR
AND
NOT
NOT
AND
NOT
NOT
NOT
AND
p
q
r
NOT
AND
AND
OR
NOT
AND
NOT
NOT

(ب)

(ج)

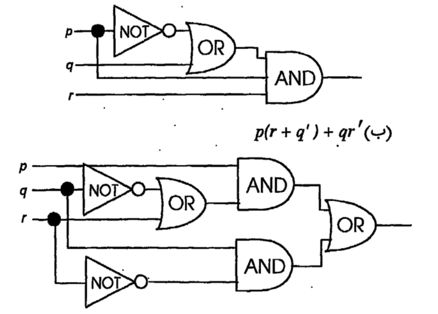
٣. صمم دائرة السلم التى يمكن فيها إضاءه مصباح أو اطفاؤه من مفتاحين أحدهما موضوع عند بداية السلم والآخر عند نهايته.

٤. لجنة تحكيم فى أحد الامتحانات تتكون من ثلاثة أساتذة ولكل منهم مفتــــاح تحت تصرفه بحيث عند موافقته على نجاح الطالب يضغط على المفتاح ليجعله فى وضع التوصيل وعند عدم موافقته يدع المفتاح فى وضع عــــدم التوصيــل. صمم دائرة بحيث يدق جرس متصل بدائرة الثلاثه مفاتيح عند موافقة أغلبيــة الأساتذة على نجاح الطالب ولا يدق فى الحالات الأخرى.

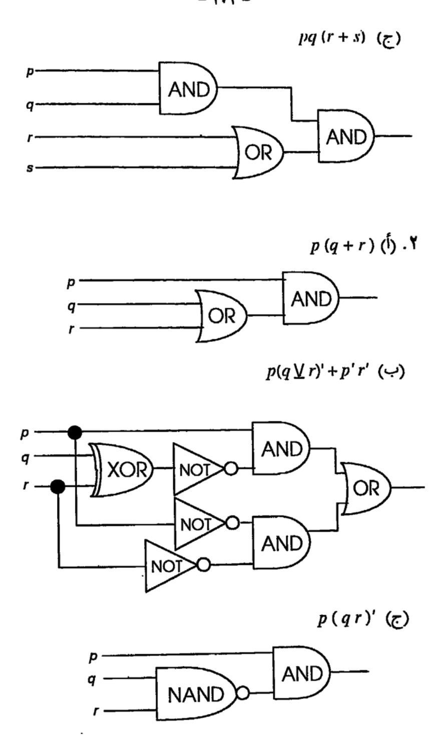
٥. فى مثال (٣) ماذا تكون الاجابة إذا فرضنا أن تلميذا واحـــــدا لم يصــدق فى عبارته؟

الإجابات

١. (أ) $p(p' + q)\, r$



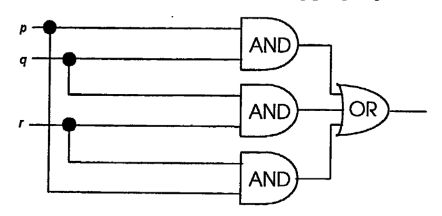
(ب) $p(r + q') + qr'$


(ج) pq (r + s)
p
q
r
s
AND
OR
AND
٢. (أ) p (q + r)
p
q
r
OR
AND
(ب) p(q ⊻ r)' + p' r'
p
q
r
XOR
NOT
NOT
NOT
AND
AND
OR
(ج) p (q r)'
p
q
r
NAND
AND

٣. $p'q + pq'$ أى $p \veebar q$



٤. $x = pq + qr + pr$



٥. فعلها أحمد.

الباب الرابع

بعض نظم العد

SOME COMPUTING SYSTEMS

٤–١ نبذة تاريخية

استخدم الإنسان شتى الوسائل للتعبير عن الأعداد: استخدام أصابع اليدين، ورسم الصور، وعقد العقد على الحبال... إلى آخر تلك الطرق البدائية. ثم استخدم المصرين القدماء الرموز:

I ، II ، III ، IIII ، IIIII ، ... ، ∩ ، ... ، $\frac{1}{8}$ ، ... ، $\frac{2}{3}$ ، ...

واستخدم الرومان الرموز الرومانية المعروفة:

I , II , III , IV , V , VI , VII , VIII , IX , X , ... , C , ... , M , ...

ثم تبعهم الهنود باستخدام الرموز:

١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩ ، ....

والعرب باستخدام الرموز:

1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5 ، 6 ، 7 ، 8 ، 9 ، 10 ، ... 100 ، ...

للتعبير عن الأعداد.

ومن ناحية أخرى فقد أُتبعت عدة نظم للعد منها النظام العشرى الذى يعتمد على عشرة أرقام:

0 ، 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5 ، 6 ، 7 ، 8 ، 9

والنظام الثنائى الذى يستخدم فيه رقمين 0 ، 1؛ والنظام الاثنا عشرى (كما فى الساعات) والنظام الستينى (كما فى الدقائق والثوانى)... الخ. وتبعا لاختلاف نظم العد اختلفت طرق الجمع والضرب ولكن بقيت طريقة مضاعفه الأعداد وأخذ أنصافها (ربما حتى الآن فى الريف الروسى) مستخدمة فى ضرب الأعداد.

مثال

لضرب 21 فى 39 نتّبع الطريقة الآتية (الطريقة الرومانية):

ضعف 39 =78

٤ مرّات 39 = ضعف 78 =156

٨ مرّات 39 = ضعف 156 = 312

١٦ مرّة 39 = ضعف 312 = 624

وحيث أن 21 = 16 + 4 + 1 ، إذن:

39x21 = (16 مرة + 4 مرات + مرة واحدة) × 39

= 624 + 156 + 39

= 819

ويمكن أيضا أن نتّبع الطريقة الروسية فى الحصول على نفس النتيجة. وتتلخص الطريقة فى أننا ننشئ عمودين: فى العمود الأول نضاعف العدد 39 وفى العمود الثانى نأخذ أنصاف العدد 21 مع إهمال باقى القسمة وهو 1 ثم نلغى الصف الذى يحتوى على عدد زوجى فى العمود الثانى ثم نجمع بقيه مكونات العمود الأول؛ وذلك على النحو التالى:

21	39	
~~10~~	~~78~~	(مع إهمال باقى القسمة وهو 1)
5	156	
~~2~~	~~312~~	(مع إهمال باقى القسمة وهو 1)
1	624	

	819	

(لاحظ أننا شطبنا الصف الذى يحتوى عددا زوجيا فى عمـــود الأنصـــاف).

ويمكن أن نفسر النتيجة التى حصلنا عليها كالآتى:

$$\begin{aligned} 21\times 39 &= (10+\tfrac{1}{2})\times 78 \\ &= (5+\tfrac{1}{4})\times 156 \\ &= (2+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4})\times 312 \\ &= (1+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{16})\times 624 \\ &= 624+156+39 \\ &= 819 \end{aligned}$$

٤-٢ نظام العد الثنائى Binary Number System

لنأخذ العدد 4605 فى النظام العشرى المعتاد. بالتعبير عن هذا العدد بدلالة قوى العدد 10 نجد أن:

$$\begin{aligned} 4605 &= 4\times 1000 + 6\times 100 + 0\times 10 + 5\times 1 \\ &= 4\times 10^3 + 6\times 10^2 + 0\times 10^1 + 5\times 10^0 \end{aligned}$$

ونستطيع أن نكتب العدد 4605 بالصورة الآتية:

خانة الألوف	خانة المئات	خانة العشرات	خانة الآحاد
4	6	0	5
$\times 10^3$	$\times 10^2$	$\times 10^1$	$\times 10^0$
= 4000	= 600	= 0	= 5

حيث الأعداد فى الصف الأخير هى القيمة المكانية *place value* لأرقام العدد 4605. ونلاحظ أننــا فى نظــام العد العشرى *decimal computing* نستخدم عشرة أرقام وهى 0 ، 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5 ، 6 ، 7 ، 8 ، 9.

نستطيع أن ننشئ نظاما مثل النظام العشرى نسميه نظام العد الثنــــائى *binary computing* نستخدم فيه رقمين فقط وهما 0 ، 1. وفى هذا النظام يعبر عــــن أى عدد بدلالة قوى العدد 2 فمثلا:

$$
\begin{array}{lllllllllll}
1 & = & & & 2^0 & & & & & & \\
2 & = & & & & & 2^1 & & & & \\
3 & = & 1+2 & = & 2^0 & + & 2^1 & & & & \\
4 & = & & & & & & & 2^2 & & \\
5 & = & 1+4 & = & 2^0 & + & & & 2^2 & & \\
6 & = & 2+4 & = & & & 2^1 & + & 2^2 & & \\
7 & = & 1+2+4 & = & 2^0 & + & 2^1 & + & 2^2 & & \\
8 & = & & & & & & & & & 2^3 \\
9 & = & 1+8 & = & 2^0 & + & & & & & 2^3
\end{array}
$$

....

وإذا استخدمنا نظام الخانات بقيمها المكانية مثل النظام العشرى فإننا نكتب:

$1 = (0001)_2$ $2 = (0010)_2$ $3 = (0011)_2$ $4 = (0100)_2$

$5 = (0101)_2$ $6 = (0110)_2$ $7 = (0111)_2$ $8 = (1000)_2$

$9 = (1001)_2$ $11 = (1011)_2$ $12 = (1100)_2$ $13 = (1101)_2$

$14 = (1110)_2$ $15 = (1111)_2$ ....

مثال (١)

أكتب العدد 21 بالنظام الثنائى.

الحـــــل

$$21 = 1 + 4 + 16$$
$$= 2^0 + 2^2 + 2^4$$
$$= 1\times2^0 + 0\times2^1 + 1\times2^2 + 0\times2^3 + 1\times2^4$$
$$= (10101)_2$$

وللحصول على الصورة الثنائية بطريقة أسهل نتّبع الآتى:

2	21	
2	10	(الباقى 1)
2	5	(الباقى 0)
2	2	(الباقى 1)
2	1	(الباقى 0)
	0	(الباقى 1)

فى هذا الجدول نقسم العدد على 2 ونكتب خارج القسمة أسفل العدد ونحسب باقى القسمة ونضعه على يمين خارج القسمة ونكرر هذه العملية حتى نصل إلى الصفر (كخارج قسمة العدد 1 على 2) ويكون باقى القسمة 1، ثم نقرأ العمود الأخير من أسفل إلى أعلى ونكتبه من اليسار إلى اليمين هكذا:

$$21 = (10101)_2$$

مثال (٢)

أكتب العدد 39 بالنظام الثنائى.

الحـــــل

2	39	
2	19	(الباقى 1)
2	9	(الباقى 1)
2	4	(الباقى 1)
2	2	(الباقى 0)
2	1	(الباقى 0)
	0	(الباقى 1)

$\therefore \quad 39 = (100111)_2$

٤-٣ التحويل من الصورة الثنائية للصورة العشرية

لنأخذ العدد الثنائى $(10101)_2$. نستطيع أن نكتب هذا العدد مستخدمين القيم المكانية كالآتى:

1	0	1	0	1
$\times 2^4$	$\times 2^3$	$\times 2^2$	$\times 2^1$	$\times 2^0$
= 16	= 0	= 4	= 0	= 1

$\therefore \quad (10101)_2 = 1 + 4 + 16 = 21$

كذلك العدد $(100111)_2$ يمكن كتابته مستخدمين القيم المكانية كالآتى:

1	0	0	1	1	1
$\times 2^5$	$\times 2^4$	$\times 2^3$	$\times 2^2$	$\times 2^1$	$\times 2^0$
= 32	= 0	= 0	= 4	= 2	= 1

$\therefore \quad (100111)_2 = 1 + 2 + 4 + 32 = 39$

بكتابة العدد $(100111)_2$ بالصورة:

$$(100111)_2 = 1\times2^0 + 1\times2^1 + 1\times2^2 + 0\times2^3 + 0\times2^4 + 1\times2^5$$

$$= 1 + 2\{1 + 2[1 + 2(0 + 2(0 + \boxed{2}))]\}$$
$$= 1 + 2\{1 + 2[1 + 2(0 + 2\times\boxed{2})]\}$$
$$= 1 + 2\{1 + 2[1 + 2(0 + \boxed{4})]\}$$
$$= 1 + 2\{1 + 2[1 + 2\times\boxed{4}]\}$$
$$= 1 + 2\{1 + 2[1 + \boxed{8}]\}$$
$$= 1 + 2\{1 + 2\times\boxed{9}\}$$
$$= 1 + 2\{1 + \boxed{18}\}$$
$$= 1 + 2\times\boxed{19}$$
$$= 1 + \boxed{38}$$
$$= \boxed{39}$$

ويمكن إجراء هذا التحويل بطريقة أتوماتيكية كالآتي:

(أ) نصُفُّ أرقام العدد متباعدة هكذا:

1	0	0	1	1	1

(ب) نضع 2 تحت الرقم الثاني من اليسار هكذا:

1	0	0	1	1	1
	2				

(ج) نجمع العمود الثاني هكذا:

1	0	0	1	1	1
	2				
	2				

(د) نضاعف ناتج الجمع ونضعه تحت الرقم الثالث من العمود هكذا:

1	0	0	1	1	1
	2	4			
	2				

(هـــ) نجمع العمود الثالث هكذا:

1	0	0	1	1	1
	2	4			
	2	4			

(و) نكرر العملية هكذا:

1	0	0	1	1	1
	2	4	8	18	38
	2	4	9	19	39

فنصل إلى النتيجة النهائية وهى ٣٩.

مثال (١)

حوّل العدد $(11101)_2$ إلى الصورة العشرية.

الحـــــل

1	1	1	0	1
	2	6	14	28
	3	7	14	29

$\therefore \quad (11101)_2 = 29.$

مثال (٢)

حوّل $(111101)_2$ إلى الصورة العشرية.

الحـــــل

1	1	1	1	0	1
	2	6	14	30	60
	3	7	15	30	61

$\therefore \quad (111101)_2 = 61$

٤-٤ الكسور الثنائية Binary Fractions

استخدم المصريون القدماء الكسور التي بسطها الواحد الصحيح مســـــتخدمين رموزاً أخرى غير المستخدمة حاليا. فمثلا الكسر $\frac{3}{4}$ يعبر عنه كالآتي:

$$\frac{3}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$$

والعدد $\frac{7}{9}$ يعبر عنه كالآتي:

$$\begin{aligned}\frac{7}{9} &= \frac{1}{2} + \frac{5}{18}\\ &= \frac{1}{2} + \frac{10}{36}\\ &= \frac{1}{2} + \frac{9}{36} + \frac{1}{36}\\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{36}\end{aligned}$$

وعيب هذه الطريقة هى تعدد الصور التي يمكن أن نعبر بها عن كســـــر معـــين فمثلا:

$$\frac{7}{8} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{24} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} = \cdots,$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{18} = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{54} = \cdots$$

والطريقة المثلى للتغلب على هذا القصور هى أن نعبِّر عن الكسر بدلالة قوى $\frac{1}{2}$ ؛ وفى هذه الحالة يكتب الكسر بطريقة وحيدة.

مثال

أكتب الكسر $\frac{31}{32}$ كمجموع كسور بدلالة قوى $\frac{1}{2}$.

الحل

$$\frac{31}{64} = \frac{16+15}{64} = \frac{16+8+7}{64} = \frac{16+8+4+2+1}{64}$$
$$= \frac{16}{64}+\frac{8}{64}+\frac{4}{64}+\frac{2}{64}+\frac{1}{64}$$
$$= \frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}$$

وإذا تأملنا معنى الكسور العشرية، فإن الكسر 0.3257 مثلا يمكن كتابته بالصورة الآتية:

$$0.3257 = \frac{3}{10}+\frac{2}{100}+\frac{5}{1000}+\frac{7}{10000}$$

والجدول الآتى يعبِّر عن القيم المكانية لأرقام هذا الكسر:

.	3	2	5	7
	$\times 10^1$	$\times 10^2$	$\times 10^3$	$\times 10^4$
	$=\frac{3}{10}$	$=\frac{2}{100}$	$=\frac{5}{1000}$	$=\frac{7}{10000}$

نستطيع أن ننشئ نظاما لكتابة الكسور ثنائيا مثل النظام العشرى نستخدم فيه رقمين فقط وهما 0 ، 1. وفى هذا النظام يعبر عن قوى العدد $\frac{1}{2}$ ثنائيا كالآتى:

$$\frac{1}{2} = 2^{-1} = (0.1)_2 \ , \ \frac{1}{4} = 2^{-2} = (0.01)_2 \ , \ \frac{1}{8} = 2^{-3} = (0.001)_2 \ , \ldots$$

ويمتد النظام الثنائى إلى الكسور الاعتيادية، فمثلا:

$$\frac{3}{4} = \frac{1}{2}+\frac{1}{4} = (0.11)_2 \ , \ \frac{13}{16} = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{16} = (0.1101)_2 \ , \ldots$$

مثال (١)

ضفدعة فى وسط بركة من الماء تريد أن تصل إلى الأرض فقفزت نصف المسافة بينها وبين أقرب نقطة، ثم قفزت نصف المسافة الباقية، ثم نصف المسافة الباقية.. وهكذا. عبِّر عن المسافات التى قفزتها بدلالة كسور من المسافة الكلية بينها وبين الأرض . هل تصل الضفدعة إلى الأرض ؟

الحـــــل

نفرض المسافة بين الضفدعة وأقرب نقطـــة هى الوحدة فتكون المسافات التى قفزتها الضفدعة هى:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$$

على الترتيب. وبالتمثيل الثنائى:

$$(.1)_2, (.01)_2, (.001)_2, (.0001)_2, \ldots$$

∴ المسافات التى غطتها الضفدعة فى المرات المتتابعة هى:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}+\frac{1}{4}, \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}, \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}, \ldots$$

أى:

$$\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{15}{16}, \ldots$$

على الترتيب. وبالتمثيل الثنائى:

$$(.1)_2, (.11)_2, (.111)_2, (.1111)_2, \ldots$$

واضح أن الضفدعة لا يمكن أن تصل إلى الأرض حيث أنها دائما تترك مسافات بينها وبين الأرض معطاة بالمتتابعة:

$$(.1)_2, (.01)_2, (.001)_2, (.0001)_2, \ldots$$

مثال (٢)

أكتب $\frac{2}{3}$ ثنائيا.

الحــــــل

$$\frac{2}{3}=\frac{2\times2}{3\times2}=\frac{4}{3\times2}=\frac{3+1}{3\times2}=\frac{3}{3\times2}+\frac{1}{3\times2}$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1\times2}{3\times2\times2}=\frac{1}{2}+\frac{2}{3\times4}$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\,\frac{1}{4}$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\left[\frac{2}{3}\right]$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}\right]$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}\cdot\frac{2}{3}\right]$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{32}+\frac{1}{128}+\cdots$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}\right]$$

$$\therefore\quad \frac{2}{3}=(.101010\ldots)_2$$

ونلاحظ أن الصورة الثنائية هنا غير منتهية ولكنها دائرة. لذا نكتب:

$$\frac{2}{3}=(.\overline{10})_2$$

مثال (٣)

أكتب الكسر $\frac{7}{9}$ كمجموع كسور بدلالة قوى $\frac{1}{2}$.

الحــــــل

$$\frac{7}{9}=\frac{7\times2}{9\times2}=\frac{14}{9\times2}=\frac{9+5}{9\times2}=\frac{9}{9\times2}+\frac{5}{9\times2}$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{5}{9\times2}=\frac{1}{2}+\frac{5\times2}{9\times4}=\frac{1}{2}+\frac{10}{9\times4}=\frac{1}{2}+\frac{9+1}{9\times4}$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{9\times4}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1\times16}{9\times4\times16}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{16}{9 \times 64}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{9+7}{9 \times 64}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{9}{9 \times 64} + \frac{7}{9 \times 64}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{64} + \frac{7}{9} \cdot \frac{1}{64}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{64}[1 + \frac{7}{9}]$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{64}[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{64}(1 + \frac{7}{9})]$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} + \frac{1}{256} + \frac{1}{4096}[1 + \frac{7}{9}]$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} + \frac{1}{256} + \frac{1}{4096}[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{64} + \cdots]$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} + \frac{1}{256} + \frac{1}{4096} + \frac{1}{8192} + \frac{1}{16384} + \cdots$$

$$\therefore \quad \frac{7}{9} = (.11000111000111...)_2 = (.11\overline{000111})_2$$

٤-٤-١ تحويل الكسور العشرية إلى النظام الثنائى

لنأخذ الكسر العشرى 0.6875 . نستطيع أن نحوّل هذا الكسر إلى الصورة الثنائية كالآتى:

$$\begin{aligned}
0.6875 &= (0.6785 \times 2) \div 2 \\
&= 1.3750 \div 2 \\
&= \frac{1}{2} + 0.3750 \div 2 \\
&= \frac{1}{2} + (0.3750 \times 2) \div 4 \\
&= \frac{1}{2} + 0.7500 \div 4 \\
&= \frac{1}{2} + (0.7500 \times 2) \div 8 \\
&= \frac{1}{2} + 1.5000 \div 8 \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + 0.5000 \div 8 \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + (0.5000 \times 2) \div 16
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + 1.0000 \div 16$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$$

$$\therefore \quad 0.6875 = (0.1011)_2$$

ويمكن إجراء هذه العملية بطريقة مختصرة كالآتى:

نضرب الكسر فى 2 هكذا:

$$\begin{array}{lr} & 0.6875 \\ \times & 2 \\ \hline = & 1.3750 \end{array}$$

ونضرب الكسر العشرى الناتج (دون العدد الصحيح) فى 2 هكذا:

$$\begin{array}{lr} & 0.3750 \\ \times & 2 \\ \hline = & 0.7500 \end{array}$$

ونكرر عملية الضرب هكذا:

$$\begin{array}{lr} & 0.7500 \\ \times & 2 \\ \hline = & 1.5000 \\ \times & 2 \\ \hline = & 0.0000 \end{array}$$

إلى أن نصل إلى أصفار يمين العلامة العشرية.

$$\therefore \quad 0.6875 = (0.1011)_2$$

مثال

حول الكسر 0.65625 إلى الصورة الثنائية.

الحـــــل

$$
\begin{array}{rr}
 & 0.65625 \\
\times & 2 \\
\hline
= & ①.31250 \\
\times & 2 \\
\hline
= & ⓪.62500 \\
\times & 2 \\
\hline
= & ①.25000 \\
\times & 2 \\
\hline
= & ⓪.50000 \\
\times & 2 \\
\hline
= & ⓪.00000
\end{array}
$$

(لاحظ أننا أهملنا الضرب فى العدد الصحيح).

$$\therefore \quad 0.65625 = (0.10101)_2$$

هذا؛ ويمكن استخدام هذه الطريقة فى تحويل أى كسر اعتيادى إلى الصـــــورة الثنائية عن طريق تحويله إلى كسر عشرى أولا كما يتضح من المثال الآتى:

مثال (٢)

حول $\frac{5}{7}$ إلى الصورة الثنائية.

الحـــــل

$$\frac{5}{7} \qquad 0.\overline{714285}$$

ونجرى عملية التحويل إلى النظام الثنائى هكذا:

$$\begin{array}{r}0.71428\ 6\\ \times\quad 2\\ \hline 1.42857\ 2\\ \times\quad 2\\ \hline 0.85714\ 4\\ \times\quad 2\\ \hline 1.71428\ 8\\ \times\quad 2\\ \hline 1.42857\ 6\end{array}$$

وبملاحظة أن الرقم فى أقصى يمين العدد مقرب فإننا نكون قد وصلنا إلى نفس الصورة فى ناتج العملية الثالثة وهى 1.428572 ؛ مما يدل على أن العملية ستتكرر.

$$\therefore \quad = (0.1\overline{011})_2 = (0.\overline{101})_2$$

ملحوظة

عند تحويل عدد يحتوى جزءا صحيحا وآخر كسرا إلى النظام الثنائى يتم تحويل كل جزء على حدة.

مثال

حول العدد $59\frac{13}{16}$ إلى النظام الثنائى.

الحـــــل

(أ) نحول أولا الجزء الصحيح وهو 59 إلى النظام الثنائى فنحصل على $(111011)_2$.

(ب) نحول الكسر $\frac{13}{16}$ إلى النظام الثنائى فنحصل على $(0.1101)_2$.

إذن $59\frac{13}{16}$ يساوى $(111011.1101)_2$.

٤–٥ التحويل من كسر ثنائى إلى كسر عشرى

لنأخذ الكسر الثنائى $(0.110111)_2$. نعلم أن القيمة المكانية لأرقام هذا الكسر هى كما يلى:

$$(0.110111)_2 = 1\times2^{-1} + 1\times2^{-2} + 0\times2^{-3} + 1\times2^{-4} + 1\times2^{-5} + 1\times2^{-6}$$

$$\therefore \quad (0.110111)_2 = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64} = \frac{32+16+4+2+1}{64} = \frac{55}{64}$$

ويمكن كتابة الكسر بصورته العشرية كما يلى:

$$(0.110111)_2 = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}$$
$$= 0.500000 + 0.250000 + 0.062500 + 0.031250 + 0.015625$$
$$= 0.859375$$

وللاختصار نكتب:

$$\begin{array}{lcrl} (0.110111)_2 & = & 0.500000 & \\ & & 0.250000 & + \\ & & \not{0.125000} & \\ & & 0.062500 & + \\ & & 0.031250 & + \\ & & 0.015625 & + \\ \hline & = & 0.859375 & \end{array}$$

حيث نلاحظ أن الكسر 0.500000 هو الصورة العشرية للكسر $\frac{1}{2}$ ، والكسر

0.250000 هو الصورة العشرية للكسر $\frac{1}{4}$ وهـــو نصـــف 0.500000 ، ... وهكذا. ونلاحظ أيضا أن الكسر 0.125000 قد شطب لأن الرقم العشـــرى الثالث صفر.

مثال (١)

حول العدد $(11011.001011)_2$ إلى الصورة العشرية.

الحـــل

الكسر		الجزء الصحيح			
~~0.500000~~	1	1	0	1	1
~~0.250000~~					
0.125000					
~~0.062500~~					
0.031250					
0.015625					
0.171875					
		2	6	12	26
		3	6	13	27

$$\therefore \quad (11011.001011)_2 = 27.171875$$

مثال (٢)

حول العدد $(0.\overline{101})_2$ إلى الصورة العشرية.

الحـــل

$$(0.\overline{101})_2 = \frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + 0 + \frac{1}{64} + \cdots$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \cdots - \left[\frac{1}{4} + \frac{1}{32} + \frac{1}{256} + \cdots\right]$$

$$=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}-\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{8}}$$

$$=1-\frac{1}{4}\cdot\frac{8}{7}=\frac{5}{7}$$

٤-٦ الجمع ثنائيا Binary Addition

قد يكون من المفيد أن نعلم أن العمليات الحسابية داخل الحاسبات الإلكترونية لا تتم بالنظام العشرى حيث أن كل مفتاح داخل دوائره المنطقية له حالتـــان فقط: 0، 1. لذا فإن كل عدد نكتبه يُترجم تلقائيا إلى النظام الثنائى وتُجـــرى العمليات الحسابية بالطريقة التى سنبينها بعد ثم يُترجم الناتج ثانية إلى النظـــام العشرى. وسنبدأ الآن بعملية الجمع المعرَّفة بالجدول الآتى:

+	0	1
0	0	1
1	1	10

ولنأخذ العددين 89 ، 57 اللذين يكتبـــان بالنظـــام الثنـــائى $(1011001)_2$ ، $(111001)_2$ على الترتيب. نجرى عملية الجمع على نفس الأسس وبنفس الطريقة التى نجرى بها عملية الجمع فى النظام العشرى كالآتى:

(١) نضع العددين تحت بعضهما هكذا:

```
1 0 1 1 0 0 1
  1 1 1 0 0 1
```

(٢) نجمع الرقمين أقصى اليمين مستخدمين الجدول فيكون الناتج 10 أى 0 ويبقى 1 نحمله على الرقمين التاليين هكذا:

```
          1
1 0 1 1 0 0 1
  1 1 1 0 0 1
─────────────
            0
```

(٣) نجمع الرقمين التاليين 0 ، 0 بالإضافة إلى الرقم المحمول 1 فيكـــون النـــاتج 1 نكتبه هكذا:

```
          1
1 0 1 1 0 0 1
  1 1 1 0 0 1
─────────────
          1 0
```

(٤) نكرر عملية الجمع للأرقام التالية والأرقام المحمولة من العمليات السابقة هكذا:

```
  1 1 1     1
  1 0 1 1 0 0 1
    1 1 1 0 0 1
  ─────────────
1 0 0 1 0 0 1 0
```

فيكون ناتج الجمع هو العدد الثنائى $(10010010)_2$ الذى يمكـــن تحويلـــه إلى النظام العشرى هكذا:

1	0	0	1	0	0	1	0
	2	4	8	18	36	72	146
	2	4	9	18	36	73	**146**

أى 146 وهو نفس العدد الذى كنا سنحصل عليه إذا أجرينا عمليـــة الجمـــع بالنظام العشرى.

ملحوظة

يمكن جمع أكثر من عددين ثنائيا غير أنه يستحسن إجــراء عملية الجمع على مراحل، كل مرحلة تتضمن جمع عددين فقط.

مثال(١)

اجمع 39 + 57 + 89 ثنائيا.

الحـــــل

$$89 = (1011001)_2 \;,\; 57 = (111001)_2 \;,\; 39 = (100111)_2$$

```
    1 1 1 1 1 1
    1 0 1 1 0 0 1
      1 1 1 0 0 1
      1 0 0 1 1 1
    -------------
  1 0 1 1 1 0 0 1
```

$$\therefore \quad (1011001)_2 + (111001)_2 + (100111)_2 = (10111001)_2 = 185$$

وهى نفس النتيجة التى كنا سنحصل عليها إذا جمعنا 89 + 57 + 39 عشريا.

نلاحظ هنا أننا لم نضطر إلى تقسيم عملية الجمع الثنائى لعدم وجود 1 مجموع أكثر من ثلاث مرات.

مثال(٢)

اجمع 49 + 57 + 89 ثنائيا.

الحـــــل

```
      1  1     1
1  0  1  1  0  0  1
   1  1  1  0  0  1
   1  1  0  0  0  1
____________________
         —
      ؟  1  0  1  1
```

نجد أن العمود الخامس يحتوى جمع 1 + 1 + 1 بالإضافة إلى١ محمـــــول مـــن العملية السابقة. لذا نجرى عملية الجمع على مرحلتين كالآتى:

```
   1  0  1  1  0  0  1
      1  1  1  0  0  1
   ____________________
            —
1  0  0  1  0  0  1  0

1  0  0  1  0  0  1  0
      1  1  0  0  0  1
_______________________
         —
1  1  0  0  0  0  1  1
```

والنتيجة هى العدد $(11000011)_2$ أى 195.

٤-٧ الطرح ثنائيا Binary Subtraction

يمكننا إجراء عملية الطرح ثنائيا على نفس الأسس وبنفس الطريقة التى تجـــرى بها الطرح فى النظام العشرى (أى مع الاستلاف) مع ملاحظة أن:

$0 - 0 = 0\ ,\ 1 - 0 = 1\ ,\ 1 - 1 = 0\ ,\ 10 - 1 = 1$

مثال (١)

أوجد ناتج طرح 23 من 39 ثنائيا.

الحـــــل

$39 = (100111)_2 \quad , \quad 21 = (10101)_2$

```
0  10
1  0  0  1  1  1
   1  0  1  0  1
-----------------
   1  0  0  1  0
```

(لاحظ أننا استلفنا الرقم ١ أقصى يسار العدد المطروح منه ليصبح الصفر الذى على يمينه 10 ويصبح هو نفسه صفرا). إذن ناتج الطرح هو العدد الثنائى $(10010)_2$ أى 18 بالتمثيل العشرى.

حل آخر

$$100111 - 10101 = 100111 + (11111 - 10101 + 1) - 100000$$
$$= 100111 + 01010 + 1 - 100000$$
$$= 100111 + 01011 - 100000$$
$$= 110010 - 100000 = 10010$$

حيث يسمى العدد 10101 − 11111 أى 01010 المكمل للعـــدد المطـــروح 10101 ونحصل عليه بوضع 0 مكان 1 ووضع 1 مكان 0. وتجـــرى العمليـــة كالآتى:

	1	1	1	1		
1	0	0	1	1	1	
	0	1	0	1	0	(مكمل 10101)
					1	
~~1~~	1	0	0	1	0	

مثال (٢)

أوجد ناتج طرح 142 من 240 ثنائيا.

الحـــــل

$$240 = (11110000)_2 \quad , \; 142 = (10001110)_2$$

		1	1	1				1		
		1	1	1	1	0	0	0	0	
		0	1	1	1	0	0	0	1	(مكمل 10001110)
									1	
~~1~~	0	1	1	0	0	0	1	0	

$$\therefore \quad 240 - 142 = (1100010)_2 = 98$$

ملحوظة

يمكن طرح عددين كل منهما مكون من جزء صحيح وكسر بشرط وضع العلامتين الدالتين على الكسر تحت بعضهما.

مثال

اطرح $6\frac{11}{16}$ من $11\frac{3}{8}$ ثنائيا.

الحـــــل

$$11\frac{3}{8} = (1011.011)_2 \ , \ 6\frac{11}{16} = (110.1011)_2$$

```
    1 1       1
  1 0 1 1 . 0 1 1 0
    0 0 1 . 0 1 0 0   (مكمل 110.1011)
                  1
  _________________
  1 1 0 0 . 1 0 1 1
```

$$\therefore \quad 11\frac{3}{8} - 6\frac{11}{16} = (100.1011)_2 = 4\frac{11}{16}$$

٤–٨ الضرب ثنائيا Binary Muliplication

نقصد بالضرب ثنائيا تحويل العددين إلى النظام الثنائى ثم إجراء عملية الضرب الثنائى المعرَّفة بالجدول الآتى:

x	0	1
0	0	0
1	0	1

لنأخذ الآن العددين 23 ، 17 اللذين يكتبان بالنظام الثنائى $(10111)_2$، $(10001)_2$ على الترتيب. نجرى عملية الضرب على نفس الأسس وبنفس الطريقة التى نجرى بها الضرب فى النظام العشرى كالآتى:

(أ) نضع العددين تحت بعضهما هكذا:

```
1 0 1 1 1
1 0 0 0 1
```

(ب) نضرب الرقم الأول من اليمين للعدد الثانى وهو 1 فى العدد الأول هكذا:

```
  1 0 1 1 1
  1 0 0 0 1
-----------
  1 0 1 1 1
```

(ج) نضرب الرقم الثانى من اليمين للعدد الثانى وهو 0 فى العدد الأول مع إزاحة الأرقام خانة واحدة جهة اليسار هكذا:

```
  1 0 1 1 1
  1 0 0 0 1
-----------
  1 0 1 1 1
0 0 0 0 0
```

(د) نضرب الرقم الثالث من اليمين للعدد الثانى وهو . فى العدد الأول مع إزاحة الأرقام خانة واحدة جهة اليسار هكذا:

```
    1 0 1 1 1
    1 0 0 0 1
-------------
    1 0 1 1 1
  0 0 0 0 0
0 0 0 0 0
```

(هـ) نكرر العملية هكذا:

```
                1   0   1   1   1
                1   0   0   0   1
---------------------------------
            ----
                1   0   1   1   1
            0   0   0   0   0
        0   0   0   0   0
    0   0   0   0   0
1   0   1   1   1
```

(و) نجمع الخمسة صفوف التى حصلنا عليها جمعا ثنائيا هكذا:

```
                1   0   1   1   1
                1   0   0   0   1
---------------------------------
            ----
    1   1   1
                1   0   1   1   1
            0   0   0   0   0
        0   0   0   0   0
    0   0   0   0   0
1   0   1   1   1
---------------------------------
            ----
1   1   0   0   0   0   1   1   1
```

فتكون النتيجة النهائية هى العدد الثنائى $(110000111)_2$ أى 391 وهو نفـــس العدد الذى كنا سنحصل عليه إذا أجرينا عملية الضرب عشريا.

ملاحظات

(١) بدلا من الضرب فى صفر نستطيع تجاوز هذه الخطوة بزحزحة الأرقـــام يسارا خانة واحدة لكل صفر هكذا:

```
        1 0 1 1 1
        1 0 0 0 1
-----------------
  1 1 1
        1 0 1 1 1
1 0 1 1 1
-----------------
1 1 0 0 0 0 1 1 1
```

(٢) فى عملية الجمع النهائى لم نصادف حتى الآن جمع أكثر من ثلاثة أرقام بمـــا فى ذلك الرقم المحمول. لذا يستحسن إجراء عملية الجمع على مراحل.

مثال

أوجد حاصل ضرب 31 فى 23 باستخدام النظام الثنائى.

الحل

$23 = (10111)_2 \quad , \quad 31 = (11111)_2$

```
        1 1 1 1 1
        1 0 1 1 1
-----------------

        1 1 1 1 1        الصف (١)
      1 1 1 1 1          الصف (٢)
    1 1 1 1 1            الصف (٣)
1 1 1 1 1                الصف (٤)
```

حاصل جمع الصفين (١) ، (٢)	1 0 1 1 1 0 1
حاصل جمع الصفين (٣) ، (٤)	1 0 0 1 1 0 1 1

1 0 1 1 0 0 1 0 0 1

وبذلك تكون النتيجة النهائية لحاصل الضرب هى العدد الثنائى $(1011001001)_2$ أى 713 وهو نفس العدد الذى كنا سنحصل عليه إذا أجرينا عملية الضرب عشريا.

٤-٩ القسمة ثنائيا Binary Division

تجرى عملية القسمة فى النظام الثنائى على نفس الأسس وبنفس الطريقة التى تجرى بها عملية القسمة فى النظام العشرى.

مثال (١)

أوجد خارج قسمة ٢٩٤ على ٤٢ ثنائيا.

الحل

$$294 = (100100110)2 \ , \ 42 = (101010)2$$

نجرى عملية القسمة كالآتى:

(أ) نضع العدد المقسوم علية يسار العدد المقسوم هكذا:

1 0 1 0 1 0) 1 0 0 1 0 0 1 1 0

(ب) نأخذ عددا من الأرقام من المقسوم من جهة اليسار مساويا عدد أرقام المقسوم عليه. فإذا كان العدد المكون من تلك الأرقام أكبر من العدد المقسوم عليه فإننا

نكتب أرقام العدد المقسوم عليه تحت الأرقام المختارة وإلا فإننا نزيد الأرقـــام المختارة واحدا ونكتب 1 فوق أول رقم من العدد المقسوم هكذا:

```
                    1
1 0 1 0 1 0 )  1 0 0 1 0 0 1 1 0
                 1 0 1 0 1 0
```

(ج) نجرى عملية الطرح هكذا:

```
                    1           1 1 1
1 0 1 0 1 0 )  1 0 0 1 0 0 1 1 0
                   1 0 1 0 1 1 1
                               1
----------------------------------
               1 0 1 1 1 1 1 1 0
```

(د) نكرر العملية هكذا:

```
               1 1 1
1 0 1 0 1 0 )  1 0 0 1 0 0 1 1 0
                   1 1 1 1 1 1 0
                   0 1 0 1 0 1 1
                               1
----------------------------------
                 1 0 1 0 1 0 1 0
                     0 1 0 1 0 1
                               1
----------------------------------
                   1 0 0 0 0 0 0
```

وبذلك يكون خارج القسمة هو العدد $(111)_2$ أى 7 وهى نفس النتيجة الـــتى كنا سنحصل عليها إذا أجرينا عملية القسمة عشريا.

ملاحظة

إذا كان أى أو كل من المقسوم والمقسوم عليه عددا مكونا من عدد صحيـــح وكسر فإننا نزحزح كلاً من العلامتين للمقسوم والمقسوم عليه بنفس المقـــدار ونكمل بأصفار ونجرى عملية القسمة كالمعتاد.

مثال (٢)

أوجد خارج قسمة $29\frac{5}{16}$ على $8\frac{11}{32}$ ثنائيا.

الحـــــل

$$29\frac{5}{16} = (11101.0101)_2 \quad , \quad 8\frac{11}{32} = (1000.01011)_2$$

$$29\frac{5}{16} \div 8\frac{11}{32} = (11101.0101)_2 \div (1000.01011)_2$$
$$= (1110101010)_2 \div (100001011)_2$$

```
                        1 1
1 0 0 0 0 1 0 1 1 )  1 1 1 0 1 0 1 0 1 0
                     0 1 1 1 1 0 1 0 0
                                     1
------------------------------------------
                   1 0 1 1 0 0 1 0 1 0 0
                       0 1 1 1 1 0 1 0 0
                                       1
------------------------------------------
                   1 0 1 0 0 0 1 0 0 1
```

ويكون خارج القسمة هو $\left(11\frac{10001001}{100001011}\right)_2$.

وبتحويل هذا المقدار إلى الصورة العشرية فإنه يساوى $3\frac{137}{267}$ وهـــى نفـــس النتيجة التى نحصل عليها إذا أجرينا عملية القسمة عشريا. أى:

$$29\frac{5}{16} \div 8\frac{11}{32} = 3\frac{137}{267}$$

٤-١٠ تصميم آلة جمع ثنائى Designing a Binary Adder

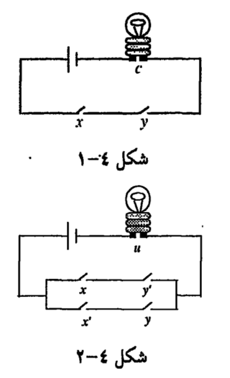
ليكن x ، y عدديْن يأخذ كل منهما القيمتين 0 ،١ . فإنه يتكـــون لدينـــا الجدول الآتى:

x	y	$x+y$
1	1	10
1	0	01
0	1	01
0	0	00

نلاحظ هنا أن حاصل الجمع يتكون من عدد ثنائى من رقمين. ليكـــن الرقـــم الذى فى الخانة اليمنى هو u ، وليكن الرقم الذى فى الخانة اليسرى هـــو c وبذلك يتكون الجدول الآتى:

x	y	c	u
1	1	1	0
1	0	0	1
0	1	0	1
0	0	0	0

يلزمنا لتمثيل العمود c من هذا الجدول عمليا مفتاحان x ، y ومصباح لتمثيل

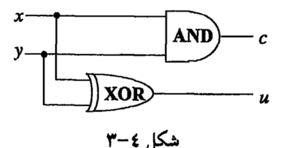


شكل ٤-١

شكل ٤-٢

قيم العمود c وبطارية لتشغيل المصباح. ويمكن تصميم دائرة بسيطة لهذه العملية كما هو مبين بشكل ٤-١. (لاحظ أن المصباح " c " لا يضيء إلا إذا كان كل من المفتاحين x ، y موصلا).

وإذا تصورنا مصباحا آخر ليمثل العمود u فإنه يمكن تصميم دائرة بسيطة لهذه العملية كما هو مبين بشكل ٤-٢. (لاحظ أن المصباح" u " لا يضيء إلا إذا كان أحد المفتاحين موصلا والآخر غير موصل). ومن ناحية أخرى نلاحظ أن العمود c يطابق xy (أى $x \wedge y$) والعمود u يطابق $x \veebar y$. إذن الدائرة المنطقية التى تحقق عملية الجمع هى كالآتى (شكل٤-٣):



شكل ٤-٣

وتسمى هذه الدائرة نصف آلة جمع *half adder* نظرا لأنها تستطيع جمع عددين يتكون كل منهما من رقم واحد؛ ولكن ماذا عن جمع عددين مثل $(1101)_2$ ، $(1011)_2$ ؟ عند جمع الخانة الأولى فإن الناتج يكون ١٠ أى 0 يكتب فى الخانة الأولى والباقى 1 يحمل على الخانة الثانية وعند جمع الخانة الثانيه فإن ناتج جمع 1+0+1 يكون 10 أى صفرا والباقى 1 يحمل على الخانة الثالثة... وهكذا، ولهذا يلزمنا جدول لجمع ثلاثة أرقام أحدها x والثانى y والثالث z (المحمول من الخانة السابقة). وهذا الجدول يتكون من ثمانية صفوف وهو كالآتى:

x	y	z	$x+y$	c	u
1	1	1	11	1	1
1	1	0	10	1	0
1	0	1	10	1	0
1	0	0	01	0	1
0	1	1	10	1	0
0	1	0	01	0	1
0	0	1	01	0	1
0	0	0	00	0	0

نلاحظ من هذا الجدول أن:

$$c = x\,y\,z + x\,y\,z' + x\,y'\,z + x\,y'\,z' \,,$$

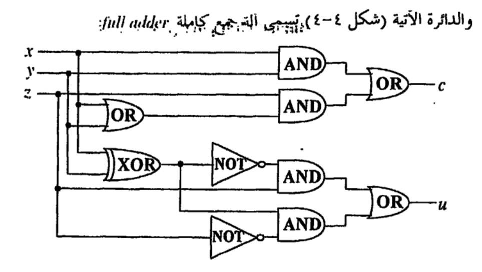
$$u = x\,y\,z + x'\,y\,z + x\,y'\,z + x\,y\,z'$$

وقد سبق لنا اختزال كل من التقريرين c ، u كالآتى:

$$c = xy + yz + xz = xy + z\,(x + y)$$

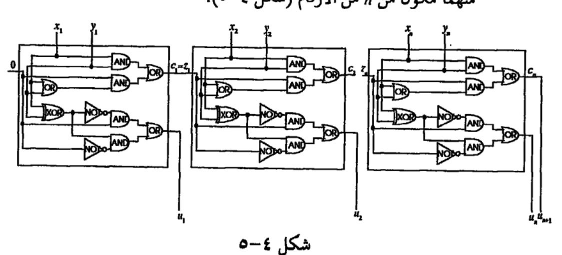
$$u = z\,(xy' + x'\,y\,)' + z'\,(xy' + x'\,y) = z\,(x \vee y)' + z'\,(x \vee y)$$

والدائرة الآتية (شكل ٤-٤) تسمى آلة جمع كاملة *full adder*:



شكل ٤-٤

وحتى الآن استطعنا أن نجمع رقمين أو رقمين بالإضافة إلى رقم محمول ولكننا لم نجمع عددا بأكمله؛ وفى هذه العملية نريد أن نجمع رقمين ونسجل أول رقم من ناتج الجمع ونُرَحِّل الرقم الثانى إلى الخانة التالية لنجمعه على الرقمين التاليين وهكذا. ولهذا الغرض تصمم الدائرة الآتية التى تصلح لجمع عددين كل منهما مكون من *n* من الأرقام (شكل ٤-٥):



شكل ٤-٥

٤-١١ تصميم آلة ضرب ثنائي Binary Multiplier

لضرب رقمين ثنائيين x ، y نستخدم الجدول الآتي:

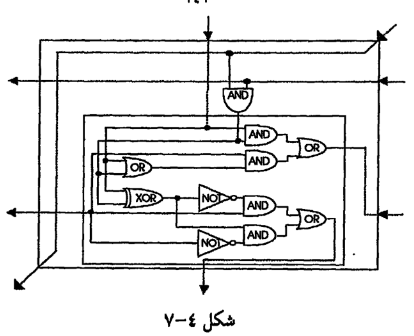
x	y	xy
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

وهو نفس جدول $x \wedge y$. ولهذا فإن الدائرة البسيطة الآتية (شكل ٤-٦) تفي بهذا الغرض:

x — AND — u
y —

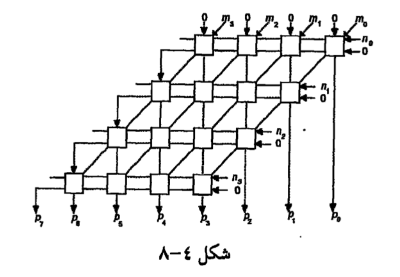
شكل ٤-٦

أما إذا أردنا ضرب عددين ثنائيين كل منهما مكون من عدة أرقام فإن الدائرة المطلوبة ستكون أعقد بكثير من تلك الدائرة إذ هي مزيج من دائرتي الجمع والضرب. والخطوة الأولى لتصميم تلك الدائرة هي تصميم وحدة تشمل عمليتي الجمع والضرب (أنظر شكل ٤-٧):



شكل ٤-٧

والدائرة الآتية (شكل ٤-٨) تصلح لضرب عدد مكون من أربعة أرقام $m_0m_1m_2m_3$ فى آخر مكون من أربعة أرقام $n_0n_1n_2n_3$ ليعطى حاصل الضرب $p_7p_6p_5p_4p_3p_2p_1p_0$:



شكل ٤-٨

ولنا أن نتصور آلاف بل ملايين مثل هذه الدائرة داخل الحاسب الآلى خاصة إذا كانت العمليات المطلوبة أعقد من هاتين العمليتين البسيطتين وهما جمع أو ضرب عددين ثنائيين! فسبحان من هدى الإنسان إلى تلك الوسائل وأعطاه القدره على تطويرها، وسبحان من خلق بلايين الخلايا فى مخ الانسان ليكون قادراً على هذا الإبتكار وهذا التطوير.

٤ – ١٢ الكود الثنائى Binary Codes

كيف تتعامل الحاسبات وآلات التلغراف الكاتب مع الكلمات العادية؟ لابد كما أوضحنا أن يكون ذلك من خلال النظام الثنائى حيث أن الدوائر الالكترونية للحاسب مصممة على هذا الأساس. وعادة نستخدم أعدادا ثنائية مكونة من ثمانية أرقام للدلاله على الحروف والرموز المختلفة حسب نظام عالمى يسمى *American Standard Code for Information Interchange* ويرمز له عاده بالرمز" ASCII" ؛ والجدول الآتى يعطى أمثلة من هذا الكود:

الرمز	الكود	المكافئ العشرى
A	01000001	65
B	01000010	66
C	01000011	67
....		
0	00110000	48
1	00110001	49
2	00110010	50
....		
*	00101010	42
+	00101011	43
....		

وكل رقم ثنائى من أرقام الكود يسمى "*Bit*" وكل مجموعة مكونة من ثمانية أرقام ثنائية تسمى "*Byte*" والكلمة "*Word*" فى لغة الحاسب قد تكون مكونة من ٨ أو ١٦ أو ٣٢ أو ٦٤ "Bit" ويعتمد ذلك على الجيل الذى ينتمى إليه الحاسب.

٤-١٢-١ الكود المصحح Correction Code

وخوفا من إرسال بيانات محتوية على أخطاء فلابد من وجود كود يمكننا من اكتشاف تلك الأخطاء. ويرجع الفضل للعالم الرياضى Hamming لإيجاد كود للتصحيح يعرف باسمه سنبسطه فى الآتى:

(١) نتصور كودا ذا أربعة أرقام فقط (أى يصلح للغة ذات ستة عشر حرفا فقط):

0000 ، 0001 ، 0010 ، 0011 ، ... ، 1111

(٢) نزيد عدد الأرقام إلى سبعة أى أن كل "Byte" تكون سباعية بالصورة $X_1X_2X_3X_4X_5X_6X_7$ حيث كل من X_1، X_2، X_3، X_4، X_5، X_6، X_7 يساوى 0 أو 1.

(٣) نخصص الخانات رقم 3 , 5 ، 6 , 7 للمعلومات والخانات رقم 1 ، ٢ ، ٤ للتأكد من المعلومات حيث نختار الأرقام X_1 ، X_2 ، X_4 بحيث تحقق المعادلات الآتية:

$$\left.\begin{array}{l} X_4 + X_5 + X_6 + X_7 = 0 \\ X_2 + X_3 + X_6 + X_7 = 0 \\ X_1 + X_3 + X_5 + X_7 = 0 \end{array}\right\} \text{بمقياس } 2$$

فمثلا الحرف 1001 فيه $X_3 = 1$ ، $X_5 = 0$ ، $X_6 = 0$ ، $X_7 = 1$ وبذلك تكون $X_4 = 1$ ، $X_2 = 0$ ، $X_1 = 0$ أى أن الرمز 1001 يرسل 0011001.

بهذه الطريقة يكتشف أى خطأ من رقم واحد بطريقة أوتوماتيكية. ليكن:

بمقياس 2

$$\left.\begin{array}{l} X_4 + X_5 + X_6 + X_7 = i \\ X_2 + X_3 + X_6 + X_7 = j \\ X_1 + X_3 + X_5 + X_7 = k \end{array}\right\}$$

فإذا كان الرمز المرسل صوابا فإن كلا من i ، j ، k يساوى صفرا. أمـــا إذا كان هناك خطأ ما فإن ذلك سينعكس على قيم i ، j ، k كالآتى:

قيمة i	قيمة j	قيمة k	الخانة التى حدث بها الخطأ
0	0	1	1
0	1	0	2
0	1	1	3
1	0	0	4
1	0	1	5
1	1	0	6
1	1	1	7

أما إذا كان هناك خطأ فى أكثر من موضع فإن ذلك يتطلب طرقا أصعب ليس هنا محل دراستها.

٤ – ١٣ نظم عد أخرى

تستخدم أحيانا نظم أخرى خلاف النظام الثنائى يكون فيها الأســـاس أرقـــام أخرى خلاف الرقم 2. وللتعبير عن أى عدد فى نظام عد معين نعبر عنه بدلالة قيمة الأساس المستخدم، فمثلا العدد 39 فى نظام العد السداسى *Hexagonal* الذى يقتصر على الأرقام 0 ، 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5 يكتب كالآتى:

$$39 = 1\times6^2 + 0\times6^1 + 3\times6^0$$

$$\therefore \quad 39 = (103)_6$$

ويمكن أن نحصل على النتيجة السابقة كالآتى:

6	39	
6	6	(الباقى 3)
6	1	(الباقى 0)
	0	(الباقى 1)

مثال

أكتب العدد 234 بنظام العد السباعى (لاحظ أنه فى هذا النظـــام تســتخدم الأرقام 0،١،٢،٣،٤،٥،٦).

الحــل

7	234	
7	33	(الباقى 3)
7	4	(الباقى 5)
	0	(الباقى 4)

$\therefore \quad 234 = (453)_7$

وأشهر أنظمة للعد هى النظام الرباعى *tetral* و الثمـــانى *octal* و الســت عشرى *hexadecimal* والتى سنفصلها فيما يلى:

٤-١٣-١ النظام الرباعى

فى هذا النظام نستخدم الأرقام 0 ،١ ، 2 ، 3 ويكون الأســـاس الــذى نحسب

عليه هو الرقم 4. والجدول الآتى يبين المكافئ الرباعى والمكافئ الثنائى لكـــل من هذه الأرقام:

الرقم	المكافئ الرباعى	المكافىء الثنائى
0	0	00
1	1	01
2	2	10
3	3	11

التحويل من النظام العشرى إلى النظام الرباعى

للتحويل من النظام العشرى إلى النظام الرباعى نستخدم إحـــدى الطريقتـــين الآتيتين:

- الطريقة الأولى: بالقسمة على 4 وأخذ البواقى.
- الطريقة الثانية: عن طريق التحويل إلى النظام الثنائى.

مثال

حول العدد 295 إلى النظام الرباعى.

الحل

الطريقة الأولى

	295	4
(الباقى 3)	73	4
(الباقى 1)	18	4
(الباقى 2)	4	4
(الباقى 0)	1	4
(الباقى 1)	0	

$\therefore \quad 295 = (10213)_4$

الطريقة الثانية

2	295	
2	147	(الباقى 1)
2	73	(الباقى 1)
2	36	(الباقى 1)
2	18	(الباقى 0)
2	9	(الباقى 0)
2	4	(الباقى 1)
2	2	(الباقى 0)
2	1	(الباقى 0)
	0	(الباقى 1)

$\therefore \quad 295 = (10213)_4$

وللتحويل من النظام الثنائى إلى النظام الرباعى فإننا نقسم العدد الثنائى إلى أزواج من الأرقام ابتداء من أقصى اليمين مع ملاحظة أنه فى حالة احتواء العدد الثنائى على عدد فردى من الأرقام يوضع صفر فى أقصى اليسار هكذا:

01 00 10 01 11

ثم نضع المكافئ الرباعى لكل زوج هكذا:

01	00	10	01	11
1	0	2	1	3

فيكون العدد الذى حصلنا عليه هو المكافئ الرباعى المطلوب.

$\therefore \quad 295 = (100100111)_2$

ملحوظة

يمكن تحويل عدد مكون من جزء صحيح وآخر كسرى إلى النظام الرباعى بنفس الطريقة المتبعة مع النظام الثنائى.

مثال

حوّل العدد $39\frac{11}{32}$ إلى النظام الرباعى.

الحل

الطريقة الأولى : بالقسمة على 4 وأخذ البواقى:

4	39	
4	9	(الباقى 3)
4	2	(الباقى 1)
4	0	(الباقى 2)

$$\therefore \quad 39 = (213)_4$$

$$\frac{11}{32} = \frac{11\times 2}{64} = \frac{22}{64} = \frac{16+4+2}{64} = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{2}{64} = (0.112)_4$$

$$\therefore \quad 39\tfrac{11}{32} = (213.112)_4$$

الطريقة الثانية: عن طريق التحويل إلى النظام الثنائى:

2	39	
2	19	(الباقى 1)
2	9	(الباقى 1)
2	4	(الباقى 1)
2	2	(الباقى 0)
2	1	(الباقى 0)
	0	(الباقى 1)

$$\therefore \quad 39 = (100111)_2$$

$39 = (100111)_2$

$$\frac{11}{32} = \frac{8+2+1}{32} = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} = (0.01011)_2$$

$\therefore \quad 39\frac{11}{32} = (100111.01011)_2$

وللتحويل للنظام الرباعى نقسم كل من الجزء الصحيــح والكســر إلى أزواج مبتدئين بالعلامة هكذا:

10	01	11	.	01	01	10
0	2	1	.	1	1	2

$\therefore \quad 39\frac{11}{32} = (213.112)_4$

التحويل من النظام الرباعى إلى النظام العشرى

يمكن تحويل عدد من النظام الرباعى إلى النظام العشرى بـــإحدى الطريقتـــين الآتيتين:

- **الطريقة الأولى: القيمة المكانية**
- **الطريقة الثانية : بواسطة التحويل إلى النظام الثنائى**

مثال

حول العدد الرباعى $(2013.013)_4$ إلى النظام العشرى.

الحـــل

نضع القيمة المكانية لكل رقم حسب خانته هكذا:

$$(2013.013)_4 = 3\times4^0 + 1\times4^1 + 2\times4^3 + 1\times4^{-2} + 3\times4^{-3}$$

$$= 3 + 4 + 128 + \frac{1}{16} + \frac{3}{64}$$

$$= 135\frac{7}{64}$$

أو نضع المكافئ الثنائى لكل رقم بنفس ترتيبه هكذا:

2	0	1	3	.	0	1	3
10	00	01	11	.	00	01	11

فيكون الناتج $(10000111.000111)_2$ هو تمثيل العدد بالنظام الثنائى، والـــذى يمكن تحويله إلى النظام العشرى بسهولة كالآتى:

1	0	0	0	0	1	1	1	.	0	0	0	1	1	1
	2	4	8	16	32	66	134					$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{64}$
	2	4	8	16	33	67	135							

فيكون الناتج هو $135\frac{7}{64}$.

الجمع رباعيا

نقصد بالجمع رباعيا تحويل كل من العددين إلى النظام الربـــاعى ثم جمعـــهما بالنظام الرباعى ثم تحويل الناتج إلى النظام العشرى. لذلك نكون جدول الجمع الآتى:

+	0	1	2	3
0	00	01	02	03
1	01	02	03	10
2	02	03	10	11
3	03	10	11	12

مثال

اجمع $135\frac{17}{64}+39\frac{7}{8}$ رباعيا وحقق الناتج عشريا.

الحل

$$135\frac{17}{64} = (2013.101)_4 \quad , \quad 39\tfrac{7}{8} = (213.32)_4$$

		1	1				
2	0	1	3	.	1	0	1
·	2	1	3	.	3	2	0
2	2	3	3	.	0	2	1

$$\therefore \quad 135\frac{17}{64} + 39\tfrac{7}{8} = (2233.021)_4 = (10101111.001001)_2$$

1	0	1	0	1	1	1	1	.	0	0	1	0	0	1
	2	4	10	20	42	86	174				$\frac{1}{8}$			$\frac{1}{64}$
	2	5	10	21	43	87	175							

$$\therefore \quad 135\frac{17}{64} + 39\tfrac{7}{8} = 175\frac{9}{64}$$

وهى نفس النتيجة التى كنا سنحصل عليها إذا أجرينا عملية الجمع عشريا مباشرة.

٤-١٣-٢ النظام الثمانى

فى هذا النظام نستخدم الأرقام 0 ، 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5 ، 6 ، 7 ويكون الأساس الذى نحسب عليه هو الرقم 8. والجدول الآتى يبين المكافئ الثمانى والمكافئ الثنائى لكل من هذه الأرقام:

الرقم	المكافئ الثمانى	المكافىء الثنائى
0	0	000
1	1	001
2	2	010

011	3	3
100	4	4
101	5	5
110	6	6
111	7	7

التحويل من النظام العشرى إلى النظام الثمانى

للتحويل من النظام العشرى إلى النظام الثمانى نستخدم إحدى الطريقتين الآتيتين:

- **الطريقة الأولى: بالقسمة على 8 وأخذ البواقى.**
- **الطريقة الثانية: عن طريق التحويل إلى النظام الثنائى.**

مثال

حول العدد 295 إلى النظام الثمانى.

الحل

الطريقة الأولى

8	295	
8	36	(الباقى 7)
8	4	(الباقى 4)
	0	(الباقى 4)

$\therefore \quad 295 = (447)_8$

الطريقة الثانية

2	295	
2	147	(الباقى 1)

2	73	(الباقى 1)
2	36	(الباقى 1)
2	18	(الباقى 0)
2	9	(الباقى 0)
2	4	(الباقى 1)
2	2	(الباقى 0)
2	1	(الباقى 0)
	0	(الباقى 1)

$\therefore \quad 295 = (447)_8$

وللتحويل من النظام الثنائى إلى النظام الثمانى فإننا نقسم العـــدد الثنـــائى إلى ثلاثيات من الأرقام ابتداء من أقصى اليمين هكذا:

100 100 111

(مع ملاحظة أنه فى حالة احتواء العدد الثنائى على عدد من الأرقام لا يقبـــل القسمة على 3 فإننا نكمله بعدد مناسب من الأصفار فى أقصى اليسار)

ثم نضع المكافئ الثمانى لكل ثلاثى هكذا:

100	100	111
4	4	7

فيكون العدد الذى حصلنا عليه هو المكافئ الثمانى المطلوب.

$\therefore \quad 295 = (447)_8$

ملحوظة

يمكن تحويل عدد مكون من جزء صحيح وآخر كسرى إلى النظـــام الربـــاعى بنفس الطريقة المتبعة مع النظام الثنائى.

مثال

حول العدد $39\frac{11}{32}$ إلى النظام الثمانى .

الطريقة الأولى: بالقسمة على 8 وأخذ البواقى:

8	39
8	4 (الباقى 7)
	0 (الباقى 4)

$$\therefore \quad 39 = (47)_8$$

$$\frac{11}{32} = \frac{11\times2}{64} = \frac{22}{64} = \frac{16+6}{64} = \frac{2}{8} + \frac{6}{64} = (0.26)_8$$

$$\therefore \quad 39\frac{11}{32} = (47.26)_8$$

الطريقة الثانية: عن طريق التحويل إلى النظام الثنائى:

2	39
2	19 (الباقى 1)
2	9 (الباقى 1)
2	4 (الباقى 1)
2	2 (الباقى 0)
2	1 (الباقى 0)

(الباقى 1)　0

$\therefore \quad 39 = (100111)_2$

$$\frac{11}{32} = \frac{8+2+1}{32} = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} = (0.01011)_2$$

$\therefore \quad 39\frac{11}{32} = (100111.01011)_2$

وللتحويل للنظام الثمانى نقسم كل من الجزء الصحيح والكسر إلى ثلاثيـــات مبتدئين بالعلامة هكذا:

100	111	.	010	110
4	7	.	2	6

$\therefore \quad 39\frac{11}{32} = (47.26)_8$

التحويل من النظام الثمانى إلى النظام العشرى

للتحويل من النظام الثمانى إلى النظام العشرى نتبع إحدى الطريقتين الآتيتين:

- **الطريقة الأولى: القيمة المكانية**
- **الطريقة الثانية : بواسطة التحويل إلى النظام الثنائى**

مثال

حول العدد الثمانى $(713.05)_8$ إلى النظام العشرى.

الحـــل

الطريقة الأولى

نضع القيمة المكانية لكل رقم حسب خانته هكذا:

$$(713.05)_8 = 3\times8^0 + 1\times8^1 + 7\times8^2 + 5\times8^{-2}$$

$$= 3 + 8 + 7\times64 + \frac{5}{64}$$

$$= 459\frac{5}{64}$$

الطريقة الثانية

نضع المكافئ الثنائى لكل رقم بنفس ترتيبه هكذا:

7	1	3	.	0	5
111	001	011	.	000	101

فيكون الناتج $(111001011.000101)_2$ هو تمثيل العـــدد بالنظـــام الثنائى، والذى يمكن تحويله إلى النظام العشرى بسهولة كالآتى:

1	1	1	0	0	1	0	1	1	.	0	0	0	1	0	1
	2	6	14	28	56	114	228	458					$\frac{1}{16}$		$\frac{1}{64}$
	3	7	14	28	57	114	229	459							

فيكون الناتج هو $459\frac{5}{64}$.

الجمع ثمانيا

نقصد بالجمع ثمانيا تحويل كل من العددين إلى النظام الثمانى ثم جمعهما بالنظام الثمانى ثم تحويل الناتج إلى النظام العشرى. لذلك نكون جدول الجمع الآتى:

+	0	1	2	3	4	5	6	7
0	00	01	02	03	04	05	06	07
1	01	02	03	04	05	06	07	10
2	02	03	04	05	06	07	10	11
3	03	04	05	07	07	10	11	12
4	04	05	06	07	10	11	12	13
5	05	06	07	10	11	12	13	14
6	06	07	10	11	12	13	14	15
7	07	10	11	12	13	14	15	16

مثال

إجمع $135\frac{17}{64}+39\frac{7}{8}$ ثمانيا وحقق الناتج عشريا.

الحـــل

$$135\frac{17}{64}=(207.21)_8 \quad , \quad 39\frac{7}{8}=(47.7)_8$$

	1	1			
2	0	7	.	2	1
	4	7	.	7	0
2	5	7	.	1	1

$$\therefore \quad 135\frac{17}{64}+39\frac{7}{8}=(257.11)_8=(10101111.001001)_2$$

1	0	1	0	1	1	1	1	.	0	0	1	0	0	1
	2	4	10	20	42	86	174				$\frac{1}{8}$			$\frac{1}{64}$
	2	5	10	21	43	87	175							

$$\therefore \quad 135\frac{17}{64}+39\frac{7}{8}=175\frac{9}{64}$$

وهى نفس النتيجة التى كنا سنحصل عليها إذا أجرينا عملية الجمع عشريا مباشرة.

٤-١٣-٢النظام الست عشرى

فى هذا النظام نستخدم الأرقام 0 ، 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5 ، 6 ، 7 ، 8 ، 9 بالإضافة إلى الحروف A ، B ، C ، D ، E ، F ويكون الأساس الذى نحسب عليه هو العدد 16. والجدول الآتى يبين المكافئ العشرى والمكافئ الثنائى لكل من هذه الأرقام:

الرقم	المكافئ العشرى	المكافىء الثنائى
0	0	0000
1	1	0001
2	2	0010
3	3	0011
4	4	1000
5	5	1010
6	6	0110
7	7	0111
8	8	1000
9	9	1001
A	10	1010
B	11	1011
C	12	1100
D	13	1101
E	14	1110
F	15	1111

ويستخدم النظام الست عشرى بكثرة فى برامج الحاسب حيث أنه مختصر فى كتابته عن النظام العشرى كما أنه يسهل تذكره وتحويله إلى النظام الثنائى.

التحويل من النظام العشرى إلى النظام الست عشرى

للتحويل من النظام العشرى إلى النظام الست عشرى نستخدم إحدى الطريقتين الآتيتين:

- الطريقة الأولى: بالقسمة على 16 و أخذ البواقى
- الطريقة الثانية: عن طريق التحويل إلى النظام الثنائى

مثال

حول العدد 299 إلى النظام الست عشرى.

الحل

الطريقة الأولى

16	299	
16	18	(الباقى 11 أى B)
16	1	(الباقى 2)
	0	(الباقى 1)

$\therefore \quad 295 = (12B)_{16}$

الطريقة الثانية

2	299	
2	149	الباقى 1
2	74	الباقى 1

2	37	الباقى 0)
2	18	الباقى 1
2	9	(الباقى 0)
2	4	(الباقى 1)
2	2	(الباقى 0)
2	1	(الباقى 0)
	0	(الباقى 1)

$\therefore \quad 295 = (100101011)_2$

وللتحويل من النظام الثنائى إلى النظام الست عشرى فإننا نقسم العدد الثنائى إلى رباعيات من الأرقام ابتداء من أقصى اليمين (مع ملاحظة أنه فى حالة احتواء العدد الثنائى على عدد من الأرقام لا يقبل القسمة على 4 فإننا نكمله بعدد مناسب من الأصفار فى أقصى اليسار) هكذا:

0001 0010 1011

ثم نضع المكافئ الست عشرى لكل رباعى هكذا:

0001 0010 1011
1 2 B

فيكون العدد الذى حصلنا عليه هو المكافئ الست عشرى المطلوب.

$\therefore \quad 295 = (12B)_{16}$

ملحوظة

يمكن تحويل عدد مكون من جزء صحيح وآخر كسرى إلى النظـــام الربـــاعى بنفس الطريقة المتبعة مع النظام الثنائى.

مثال

حول العدد $39\frac{11}{32}$ إلى النظام الست عشرى.

الحـــل

الطريقة الأولى: بالقسمة على ١٦ و أخذ البواقى:

16	39	
16	2	(الباقى 7)
	0	(الباقى 2)

$$\therefore \quad 39 = (27)_{16}$$

$$\frac{11}{32} = \frac{11\times 8}{256} = \frac{88}{256} = \frac{5\times 16+8}{256} = \frac{5}{16} + \frac{8}{256} = (0.58)_{16}$$

$$\therefore \quad 39\frac{11}{32} = (27.58)_{16}$$

الطريقة الثانية: عن طريق التحويل إلى النظام الثنائى:

2	39	
2	19	(الباقى 1)
2	9	(الباقى 1)
2	4	(الباقى 1)

2	2	(الباقى 0)
2	1	(الباقى 0)
	0	(الباقى 1)

$\therefore \quad 39 = (100111)_2$

$$\frac{11}{32} = \frac{8+2+1}{32} = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} = (0.01011)_2$$

$\therefore \quad 39\frac{11}{32} = (100111.01011)_2$

وللتحويل للنظام الثمانى نقسم كل من الجزء الصحيح والكسر إلى رباعيات مبتدئين بالعلامة هكذا:

$$\begin{array}{cccccc} 0010 & 0111 & . & 0101 & 1000 \\ 2 & 7 & . & 5 & 8 \end{array}$$

$\therefore \quad 39\frac{11}{32} = (47.58)_{16}$

التحويل من النظام الست عشرى إلى النظام العشرى

للتحويل من النظام الست عشرى إلى النظام العشرى نتبع إحدى الطريقتين الآتيتين:

- **الطريقة الأولى: القيمة المكانية**
- **الطريقة الثانية : بواسطة التحويل إلى النظام الثنائى**

مثال

حول العدد الست عشرى $(7B3.1D)_{16}$ إلى النظام العشرى.

الحل

الطريقة الأولى

نضع القيمة المكانية لكل رقم حسب خانته هكذا:

$$(7B3.1D)_{16} = 3\times16^{0} + 11\times16^{1} + 7\times16^{2} + 1\times16^{-1} + 13\times16^{-2}$$
$$= 3 + 176 + 7\times256 + \frac{1}{16} + \frac{13}{256} = 1971\frac{29}{256}$$

الطريقة الثانية

نضع المكافئ الثنائى لكل رقم بنفس ترتيبه هكذا:

7	B	3	.	1	D
0111	1011	0011	.	0001	1101

فيكون الناتج $(11110110011.00011101)_2$ هو تمثيل العدد بالنظام الثنـــائى، والذى يمكن تحويله إلى النظام العشرى بسهولة كالآتى:

1	1	1	1	0	1	1	0	0	1	1	.	0	0	0	1	1	1	0	1
	2	6	14	30	60	122	246	492	984	1970					$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{64}$		$\frac{1}{256}$
	3	7	15	30	61	123	246	492	985	1971									

فيكون الناتج هو $1971\frac{29}{256}$.

الجمع ست عشريا

نقصد بالجمع ست عشريا تحويل كل من العددين إلى النظام الست عشرى ثم جمعهما بالنظام الست عشرى ثم تحويل الناتج إلى النظام العشرى. لذلك نكون جدول الجمع الآتى:

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
0	00	01	02	03	04	05	06	07	08	09	0A	0B	0C	0D	0E	0F
1	01	02	03	04	05	06	07	08	09	0A	0B	0C	0D	0E	0F	10
2	02	03	04	05	06	07	08	09	0A	0B	0C	0D	0E	0F	10	11
3	03	04	05	07	07	08	09	0A	0B	0C	0D	0E	0F	10	11	12
4	04	05	06	07	08	09	0A	0B	0C	0D	0E	0F	10	11	12	13
5	05	06	07	08	09	0A	0B	0C	0D	0E	0F	10	11	12	13	14
6	06	07	08	09	0A	0B	0C	0D	0E	0F	10	11	12	13	14	15
7	07	08	09	0A	0B	0C	0D	0E	0F	10	11	12	13	14	15	16
8	08	09	0A	0B	0C	0D	0E	0F	10	11	12	13	14	15	16	17
9	09	0A	0B	0C	0D	0E	0F	10	11	12	13	14	15	16	17	18
A	0A	0B	0C	0D	0E	0F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
B	0B	0C	0D	0E	0F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1
C	0C	0D	0E	0F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B
D	0D	0E	0F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B	1C
E	0E	0F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B	1C	1D
F	0F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B	1C	1D	1E

مثال

اجمع $135\frac{17}{64}+39\frac{7}{8}$ ست عشريا وحقق الناتج عشريا.

الحل

نحول كلا من العددين للنظام الست عشرى فنجد:

$$39\frac{7}{8} = (27.E)_{16} \qquad 135\frac{17}{64} = (87.44)_{16}$$

ثم نجمع كالمعتاد مستخدمين الجدول كالآتى:

	1			
8	7	.	4	4
2	7	.	E	0
A	F	.	2	4

$$\therefore \quad 135\frac{17}{64} + 39\frac{7}{8} = (AF.24)_{16} = (10101111.001001)_2$$

1	0	1	0	1	1	1	1	.	0	0	1	0	0	1
	2	4	10	20	42	86	174				$\frac{1}{8}$			$\frac{1}{64}$
	2	5	10	21	43	87	175							

$$\therefore \quad 135\frac{17}{64} + 39\frac{7}{8} = 175\frac{9}{64}$$

وهى نفس النتيجة التى كنا سنحصل عليها إذا أجرينا عملية الجمع عشريا مباشرة.

أمثلة متنـــــوعة

مثال (١)

حوّل العدد 576 إلى النظام الثمانى والنظام الست عشرى.

الحـــــل

نحوّل العدد 576 أولا إلى النظام الثنائى:

$(110\ 111\ 101)_2 = 576$

ثم نحول العدد $(110\ 111\ 101)_2$ إلى النظام الثمانى كالآتى:

110	111	011
6	7	5

$\therefore \quad 576 = (675)_8$

أما التحويل إلى النظام الست عشرى فيكون كالآتى:

0001	1011	1101
1	B	D

$\therefore \quad 576 = (1BD)_{16}$

مثال (٢)

حوّل العدد $(A8F.2B)_{16}$ إلى النظام الرباعى.

الحـــــل

A	8	F	.	2	B
1010	1000	1111	.	0010	1011

$\therefore \quad (A8F.2B)_{16} = (101010001111.00101011)_2 = (222033.0223)_4$

مثال (٣)

أكتب الكلمة AND بالكود ASCII ومن ثم اكتبها بالكود الست عشرى.

الحـــل

الحرف	الكودASCII
A	01000001
N	01001110
D	01000100

تكتب الكلمة AND بالصورة : 01000001 – 01001110 – 01000100

وبالكود الست عشرى فإن AND تكتب بالصورة : 414E44

مثال (٤)

أجر عملية الجمع الآتية:

$(72D9.1C)_{16} + (C868.2A1)_{16}$

الحـــل

نحوّل كل عدد إلى النظام الثنائى كالآتى:

$(72D9.1C)_{16} = (0111\ 0010\ 1101\ 1001.0001\ 1100)_2$

$(C868.2A1)_{16} = (1100\ 1000\ 0110\ 1000.0010\ 1010\ 0001)_2$

ثم نجمع الجزأين الصحيحين ثنائيا كالآتى:

1 1 1 1 1

0 1 1 1 0 0 1 0 1 1 0 1 1 0 0 1

```
      1 1 0 0 1 0 0 0 0 1 1 0 1 0 0 0
      -------------------------------
  1 0 0 1 1 1 0 1 1 0 1 0 0 0 0 0 1
```

وبعد ذلك نجمع الجزأين الكسريين كالآتى:

```
   1 1 1
. 0 0 0 1 1 1 0 0 0 0 0 0
. 0 0 1 0 1 0 1 0 0 0 0 1
-------------------------
. 0 1 0 0 0 1 1 0 0 0 0 1
```

ثم نضع المكافئ الست عشرى لكل رباعى من الأرقام الثنائية كالآتى:

0001	0011	1011	0100	0001	.	0100	0110	0001
1	3	B	4	1	.	4	6	1

$$\therefore \quad (C868.2A1)_{16} + (72D9.1C)_{16} = (13B41.461)_{16}$$

طريقة أخرى

نجمع مباشرة باستخدام جدول الجمع للنظام الست عشرى كالآتى:

```
1     1 1       1
0 C 8 6 8 . 2 A 1
0 7 2 D 9 . 1 C 0
-----------------
1 3 B 4 1 . 4 6 1
```

$$\therefore \quad (C868.2A1)_{16} + (72D9.1C)_{16} = (13B41.461)_{16}$$

تمريــــــــن (٤)

١. حوِّل إلى الصورة العشرية كلا مما يأتى:

$(1101.1011)_2$ ، $(12.13)_4$ ، $(4705)_8$ ، $(C9B)_{16}$)٧

٢. حوِّل العدد 3263 إلى النُظُم الآتية:

الثنائى – الرباعى – الثمانى – الست عشرى.

٣. حوِّل العدد 6875.145 إلى النُظُم الآتية:

الثنائى – الرباعى – الثمانى – الست عشرى.

٤. حول كلا من الأعداد الآتية إلى الصوره الثنائية:

$215\frac{13}{15}$ ، $325.\bar{5}$ ، $145.2\bar{3}$

٥. أجر العمليات الآتية مستخدما كل من النظام الثنائى والنظام الرباعى والنظام الثمانى:

(أ) $625.000125 + 434.1796875$

(ب) $13\ 43 \times 23$

(ج) 15.2×5.625

٦. أكتب المكافىء الثنائى للكلمة LIST بكود ASCII .

٧. اجمع العددين $6531.0625 + 726.1625$ ست عشريا.

٨. اقسم 1234 على 232 ثنائيا.

٩. أجر العمليات الآتية مستخدما النظام الرباعى:

23×15 ، ١٣+٣١ ، ١١+١٥+١٢

١٠. كود ثنائى مكون من سبعة أرقام X_1، X_2، X_3، X_4، X_5، X_6، X_7 خصصت أربعة منها وهى X_2، X_3، X_5، X_7 للمعلومات وثلاثـــة وهى X_1، X_4، X_6 للتصحيح بحيث:

$$\left.\begin{array}{l} X_1 + X_2 + X_3 + X_5 = 0 \\ X_2 + X_4 + X_5 + X_7 = 0 \\ X_2 + X_5 + X_6 + X_7 = 0 \end{array}\right\} \text{بمقياس ٢}$$

صحح الرسالة 1010011 – 1100101 – 1001010 علما بأن الخطأ لا يحدث فى أكثر من رقم واحد فى الكلمة.

الباب الخامس

العلاقات

Relations

٥–١ الأزواج المُرتَّبة Ordered Pairs

الزوج المُرتَّب هو مجموعة من عنصرين، يميَّز أحدهما بأنه العنصر الأول. وحتى لا نخلط بين الزوج المرتب والمجموعة ذات العنصرين $\{a , b\}$ فإننا نكتب الزوج المرتب الذى يتكون من العنصرين a ، b حيث a هو العنصر الأول بالصورة (a , b)، أما الزوج المرتب الذى يتكون من نفس العنصرين a ، b حيث b هو العنصر الأول فيكتب بالصورة (b , a). وبوجه عام فإن:

$$(a , b) \neq (b , a)$$

فى حين أن:

$$\{a , b\} = \{b , a\}$$

أيضا فإن:

$$(a , b) = (c , d) \Leftrightarrow a = c , b = d$$

٥–٢ حاصل الضرب الكرتيزى Cartesian Product

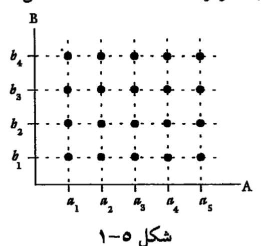
لتكن A ، B مجموعتين غير خاليتين. حاصل الضرب الكرتيزى B×A هو مجموعة عناصرها جميع الأزواج المُرتَّبة التى ينتمى عنصرها الأول للمجموعة A وينتمى عنصرها الآخر للمجموعة B . أى أن:

$$A \times B = \{(a.b) : a \in A , b \in B\}$$

٥-٢-١ تمثيل حاصل الضرب الكرتيزى Representation of Cartesian Products

لنفرض مجموعتين $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ ، $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$.

يمثل حاصل الضرب الكرتيزى B×A بيانيا كما فى شكل ٥-١.



شكل ٥-١

وتستخدم هذه الطريقة إذا كـــان عدد عناصر كل من المجمـــوعتين A ، B محدودا.

مثال (١)

لتكن $A = \{a, b\}$ ، ولتكن $B = \{\Delta, \Box, \bigcirc\}$. أكتب حاصل الضـــرب الكرتيزى B×A ومثّله بيانيا .

الحـــــل

$$A\times B = \{(a,\Delta),(a,\Box),(a,\bigcirc),(b,\Delta),(b,\Box),(b,\bigcirc)\}$$

التمثيل البيانى لحاصل الضرب الكرتيزى موضـــــح فى شكل ٥-٢.

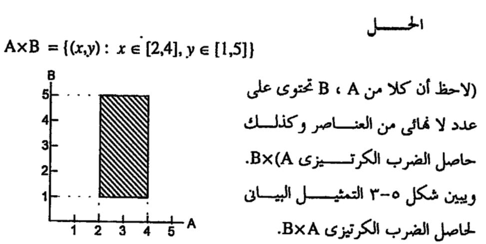
شكل ٥-٢

مثال (٢)

إذا كانت A هى الفترة [2,4] وكانت B هى الفترة [1,5] ،مثّل حاصل الضرب الكرتيزى $B \times A$ بيانيا.

الحـــــل

$$A \times B = \{(x,y) : x \in [2,4], y \in [1,5]\}$$



(لاحظ أن كلا من A ، B تحتوى على عدد لا نهائى من العنـــاصر وكذلـــك حاصل الضرب الكرتـــــيزى $B \times A$).
ويبين شكل ٥-٣ التمثيـــــل البيـــانى لحاصل الضرب الكرتيزى $B \times A$.

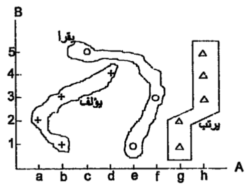
وبوجه عام فإن $B \times A$ لا يساوى $A \times B$. ولا يحدث التساوى إلا إذا كـــــانت $A = B$. وتسمى المجموعة $A \times A$ المربع الكرتيزى *Cartesian square* وتكتـــــب A^2.

٥-٣ العلاقة من مجموعة إلى مجموعة Relation from a Set into a Set

فى كثير من الأحيان تقابلنا عبارات مثل: "أحمد والد مجـــدى"، "مجـــدى نجـــل أحمد"،" 4 أكبر من 3" ، "2 عامل من عوامل 10" ، "10 مضاعف للعـــدد 2"، ... كل من العبارات السابقة تحدد علاقة بين عنصرين. لتكن $a \in A$ ولتكـــن $b \in B$. إذا كـــان العنصـــر a على علاقـــة $\mathscr{R}$ بالعنصر b فإننا نكتب $a \; \mathscr{R} \; b$.

مثال

لنفرض أننا دخلنـــا دارا للكتب فإن المجمـــوعتين الرئيسيتين فى هذه الدار هى مجموعة الأفراد $A = \{a , b , c , d , e , f , g\}$ ومجموعـــة الكتـــب $B = \{1 , 2 , 3 , 4 , 5\}$. يمكن أن نكوّن عدة علاقات مـــن المجموعـــة A إلى المجموعة B مثل "يقرأ" "يؤلف" "يرتب"،...ويوضح شكل ٥-٤ بعض تلـــك العلاقات:



شكل ٥-٤

يلاحظ أن كل علاقة من تلك العلاقات هى مجموعة جزئية من حاصل الضرب الكرتيزى B×A. وهذا يقودنا إلى التعريف التالى:

> لتكن A ، B مجموعتين غير خاليتين. أى مجموعة جزئية من حـــاصل الضـــرب الكرتيزى A × Bتمثل علاقة $\mathscr{R}$ من A إلى B ($\mathscr{R} \subset A \times B$).

٥-٤ طرق تمثيل العلاقات Methods of Representation of Relations

يمكن تمثيل العلاقة من مجموعة إلى مجموعة بعدة طرق منها:

٥-٤-١ الطريقة الكرتيزيه Cartesian Representation

فى هذه الطريقة يرسم حاصل الضرب الكرتيزى بيانيـــا كما سبق ثم توضـــع

علامات مختلفة كل منها توضح علاقة من العلاقات؛ فمثلا العلاقة "يقـــــرأ" فى المثال السابق تمثلها الدوائر، والعلاقة "يؤلف" تمثلها علامة + ، والعلاقة "يرتب" تمثلها العلامة Δ كما فى شكل ٥-٤.

٥-٤-٢طريقة الحصر Roaster Method

فى هذه الطريقة يتم كتابة الأزواج المرتبة التى تؤلف العلاقة بين قوسين؛ فمثــــلا العلاقات "يقرأ" ، "يؤلف" ، "يرتب" فى المثال السابق تكتب:

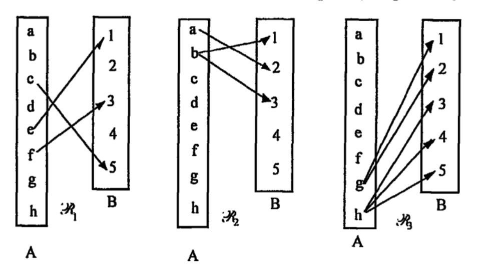
$\mathscr{R}_1 = \{(c,5),(e,1),(f,3)\}$,

$\mathscr{R}_2 = \{(a,2),(b,1),(b,3)\}$,

$\mathscr{R}_3 = \{(g,1),(g,2),(h,3),(h,3),(h,4),(h,5)\}$

٥-٤-٣طريقة المخطط السهمى Arrow Method

تكتب عناصر المجموعتين فى مستطيلين متقابلين. وإذا كان $a \mathscr{R} b$ فإننا نرســـم سهما من a إلى b . ويبين شكل ٥-٥ المخططات السهمية للعلاقات $\mathscr{R}_1$، $\mathscr{R}_2$ ، $\mathscr{R}_3$ السابق تمثيلها بالطريقتين السابقتين:



شكل ٥-٥

٥-٤-٤ الطريقة المصفوفية Matrix Method

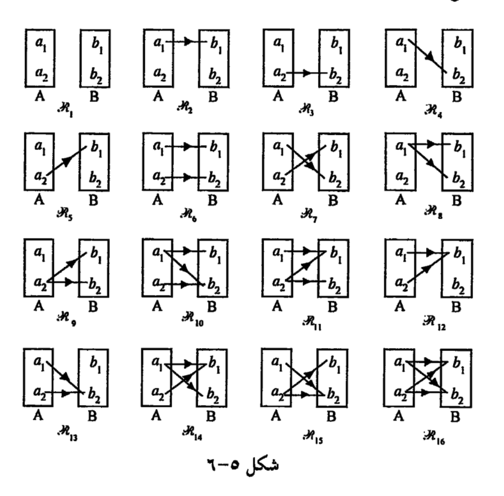
فى هذه الطريقة إذا كـــان عدد عناصر المجمـــوعة A يساوى m وعدد عناصر المجموعة B يساوى n فإننا نمثل أى علاقة R من A إلى B بمصفوفة ذات m من الصفوف، n من الأعمدة. لتكـــــن $A = \{a_1 , a_2 , \dots , a_m\}$ ، ولتكـــن $B = \{b_1 , b_2 , \dots , b_n\}$. فإذا كان $(a_i , b_j) \subset \mathscr{R}$ فإن العنصر الذى فى الصف i والعمود j يساوى 1 أما إذا كان $(a_i , b_j) \not\subset \mathscr{R}$ فإن العنصر الذى فى الصف i والعمود j يساوى صفرا. وتمثل المصفوفات الآتية العلاقـــات $\mathscr{R}_1$ ، $\mathscr{R}_2$ ، $\mathscr{R}_3$ السابق تمثيلها بالطرق السابقة:

$$\mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{R}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{R}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

٥-٥ عدد العلاقات من مجموعة إلى مجموعة Number of Relations

لتكن A مجموعة عدد عناصرها 2 ولتكن B مجموعة عدد عناصرهـــا 2. فـإن حاصل الضرب الكرتيزى A × B يحتوى على $2 \times 2 = 4$ من الأزواج المرتبـــة (a , b). أما عدد العلاقات التى يمكن تعريفها من A إلى B فيساوى عدد المجموعات الجزئية من حاصل الضرب الكرتيزى ويساوى 2^4 أى 16 ويشمـــل ذلك العدد العلاقة الخالية $\mathcal{R}_1 = \phi$ والعلاقة الشاملة $\mathcal{R}_{16} = A \times B$. ويوضح شكل ٥-٦ المخططات السهمية لتلك العلاقات:



شكل ٥-٦

كم من تلك العلاقات يحقق الشرط الآتى؟:

لكل $a \in A$ يوجد عنصر واحد فقط $b \in B$ بحيث $a \mathscr{R} b$.

سنجد الجواب لهذا السؤال هو:

العلاقات $\mathscr{R}_6$ ، $\mathscr{R}_7$ ، $\mathscr{R}_{12}$ ، $\mathscr{R}_{13}$ فقط تحقق هذا الشرط!

لنفرض الآن أن عدد عناصر المجموعة A هو m وعدد عناصر المجموعة B هو n فإن حاصل الضرب الكرتيزى $A \times B$ يحتوى على mn من الأزواج المرتبة، وتبعا لذلك فإن عدد العلاقات التى يمكن تكوينها من A إلى B يساوى 2^{mn} ويشمل هذا العدد العلاقة الخالية ϕ والعلاقة الشاملة $A \times B$. كم من تلك العلاقات يحقق الشرط الآتى؟:

لكل $a \in A$ يوجد عنصر واحد فقط $b \in B$ بحيث $a \mathscr{R} b$.

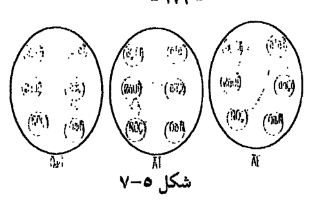
سنجد الإجابة هى : n^m

٥-٦ العلاقة على مجموعة Relation on a Set

لتكن A مجموعة غير خالية. أى علاقة من المجموعة A إلى المجموعة A نفسها تسمى علاقة على المجموعة A وتمثل العلاقة على مجموعة بالطريقة الآتية بالإضافة إلى الطرق السابقة:

مثال (١)

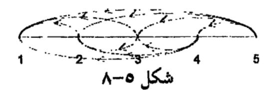
لنأخذ عائلة أفرادها هم "محمد، رشاد، طلعت، سمير، نادية، منال". يمكن أن نكون علاقات على تلك المجموعة مثل "أب"، "أخ" ، "زوج"، "ابن"، "ابنه"... الخ. ويمكن تمثيل بعض هذه العلاقات بمخططات سهمية مبينة بشكل ٥-٧.



شكل ٥–٧

مثال (٢)

العــلاقة "أكبر من" علاقة على مجمـــوعة الأعداد $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ تمثـــل بالمخطط السهمى المبين بشكل ٥–٨.



شكل ٥–٨

٥–٧ أنواع العلاقات على مجموعة Types of Relations on a Set

هناك بعض أنواع خاصة من العلاقات على مجموعة نورد منها الآتى:

٥–٧–١ العلاقة العاكسة Reflexive Relation

يقال أن العلاقة $\mathscr{R}$ عاكسة على المجموعة A إذا وفقط إذا كان:

$$a \mathscr{R} a \quad \forall a \in A$$

فمثلا علاقة "=" على مجموعة الأعداد الطبيعية هى علاقة عاكسة حيث أن كل عدد يساوى نفسه.

وكذلك علاقة " $\leq$ " هى علاقة عاكسة على مجموعة الأعداد الطبيعية، ولكــــن علاقة "$<$" هى علاقة غير عاكسة على مجمـــوعة الأعداد الطبيعية. مثل هـــذه

العلاقة تسمى لا عاكسة *irreflexive* حيث أن:

n ليست أصغر من n لكل $n \in \mathbf{N}$.

ويمكن اكتشاف أن علاقة ما عاكسة إذا كان فى مخططها السهمى تظهر عقدة عند كل نقطة (أنظر شكل ٥-٩).

شكل ٥-٩

وإذا مثلنا العلاقة العاكسة بمصفوفة فإن عناصر القطر الرئيسى لابد أن تساوى 1؛ فمثلا العلاقة الممثلة بشكل ٥-٩ يكمن تمثيلها مصفوفيا كالآتى:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

٥-٧-٢ العلاقة المتماثلة Symmetric Relation

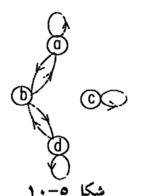
يقال أن العلاقة $\mathscr{R}$ متماثلة على A إذا وفقط إذا كان:

$$a \mathscr{R} b \Rightarrow b \mathscr{R} a$$

فمثلا علاقة "=" متماثلة على مجموعة الأعداد الطبيعية حيث أن:

$$m = n \Rightarrow n = m \quad \forall\, m,n \in \mathbf{N}$$

ويمكن اكتشاف أن علاقة ما متماثلة إذا كان أى سهم يصل العنصر a بالعنصر b يقابله سهم آخر من b إلى a (أنظر شكل ٥-١٠).



شكل ٥-١٠

وإذا مثلنا العلاقة المتماثلة بمصفوفة فان العناصر المتساوية البعد عن القطر الرئيسى تكون متساوية؛ فمثلا العلاقة الممثلة بشكل ٥-١٠ يمكن تمثيلها

مصفوفيا كالآتى:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

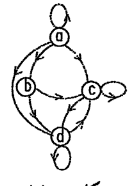
٥-٧-٣ العلاقة الناقلة Transitive Relation

يقال أن العلاقة $\mathscr{R}$ ناقلة على A إذا وفقط إذا كان:

$$(a \mathscr{R} b)\,,\,(b \mathscr{R} c) \Rightarrow (a \mathscr{R} c)$$

فمثلا علاقة "=" وعلاقة "$<$" كل منهما ناقلة على مجموعة الأعداد الطبيعية (من السهل البرهنة على ذلك).

وفى المخطط السهمى لعلاقة ناقلة إذا وجد سهم من a إلى b وسهم آخر من b إلى c فلابد أن يوجد سهم ثالث من a إلى c (انظر شكل ٥-١١). ويمكن تمثيل العلاقة فى شكل ٥-١١ مصفوفيا كالآتى:



شكل ٥-١١

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

٥-٧-٤ علاقة التكافؤ Equivalence Relation

يقال أن العلاقة $\mathscr{R}$ هى علاقة تكافؤ على A إذا وفقط إذا كانت:

(أ) $\mathscr{R}$ عاكسة على A،

(ب) $\mathscr{R}$ متماثلة على A،

(ج) $\mathcal{R}$ ناقلة على A.

مثال (١)

علاقة "=" هى علاقة تكافؤ على مجموعة الأعداد الطبيعية حيث أنهـــا تحقـــق الثلاثة الشروط (أ) ، (ب) ، (ج).

مثال (٢)

علاقة "يوازى" "//" هى علاقة تكافؤ على مجموعة المســتقيمات فى المســتوى حيث أن:

(أ) كل مستقيم يوازى نفسه،

(ب) إذا وازى المستقيم ل المستقيم م فان المستقيم م يوازى المستقيم ل.

(ج) المستقيمان الموازيان لثالث متوازيان.

مثال (٣)

أثبت أن العلاقة $\mathcal{R}$ المُعَرَّفَة على مجموعة الأزواج المرتبة من الأعـــداد الطبيعيـــة N^2 كالآتى:

$$(m, n)\,\mathcal{R}\,(m', n') \Leftrightarrow m + n' = n + m'$$

هى علاقة تكافؤ.

الحـــــل

(أ) $(m, n)\,\mathcal{R}\,(m, n)$ لأن $m + n = n + m$.

إذن العلاقة $\mathcal{R}$ عاكسة.

(ب) $(m, n)\,\mathcal{R}\,(m', n') \Rightarrow (m', n')\,\mathcal{R}\,(m, n)$ لأن:

$$(m, n)\,\mathcal{R}\,(m', n') \quad \Rightarrow \quad m + n' = n + m'$$

$$\Rightarrow\ m'+n = m+n' = n'+m$$

$$\Rightarrow\ (m',n')\ \mathscr{R}\ (m,n)$$

إذن العلاقة $\mathscr{R}$ متماثلة.

(ج) العلاقة $\mathscr{R}$ ناقلة لأن:

$$(m,n)\ \mathscr{R}\ (m',n') \wedge (m',n')\ \mathscr{R}\ (m'',n'')$$

$$\Rightarrow (m+n'=n+m') \wedge (m'+n''=n'+m'')$$

$$\Rightarrow m+n'+m'+n''=n+m'+n'+m''$$

$$\Rightarrow m+n''=n+m'' \Rightarrow (m,n)\ \mathscr{R}\ (m'',n'')$$

٥-٨ فصول التكافؤ Equivalence Classes

لتكن $\mathscr{R}$ علاقة تكافؤ على المجموعة A وليكن $a \in A$. تسمى المجموعة:

$$\{b : b \in A,\ b\ \mathscr{R}\ a\}$$

فصل تكافؤ *equivalence class* يحتوى العنصر a بالنسبة للعلاقة $\mathscr{R}$ ويرمز له بالرمز $\mathscr{C}_{\mathscr{R}}(a)$.

مثال(١)

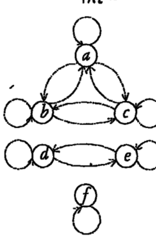
أثبت أن العلاقة الآتية على المجموعة $A=\{a,b,c,d,e,f\}$ علاقة تكافؤ:

$$\mathscr{R}=\{(a,a),(a,b),(a,c),(b,a),(b,b),(b,c),(c,a),$$
$$(c,b),(c,c),(d,d),(d,e),(e,d),(e,e),(f,f)\}$$

وأوجد فصول التكافؤ.

الحـــل

شكل ٥-١٢ يبين العلاقة $\mathscr{R}$.



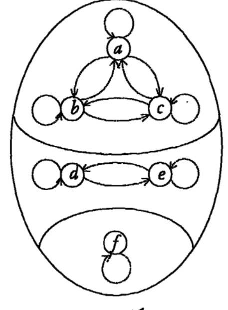
شكل ٥-١٢

من الشكل نجد أن العلاقة عاكسة ومتماثلة وناقلة. إذن فهى علاقة تكافؤ.

فصول التكافؤ لهذه العلاقة هى:

$$\mathscr{E}_{\mathfrak{R}}(a) = \{a,b,c\} \ , \ \mathscr{E}_{\mathfrak{R}}(d) = \{d,e\} \ , \ \mathscr{E}_{\mathfrak{R}}(f) = \{f\}$$

نلاحظ أن فصول التكافؤ هذه تكون تجزيئا على المجموعة A (أنظر شكل ٥-١٣).



شكل ٥-١٣

وسنثبت الآن أن هذه خاصية عامة طبقا للنظرية الآتية:

نظريـــــة

لتكن $\mathscr{R}$ علاقة تكافؤ على A. فإن فصول التكافؤ الناتجة من العلاقة تكــــوّن تجزيئا للمجموعة A.

البرهان

ليكن $\mathscr{E}_{\mathscr{R}}(a)$ فصل تكافؤ يحتوى العنصر a ، وليكن $\mathscr{E}_{\mathscr{R}}(b)$ فصل تكافؤ يحتوى العنصر b. إذا كان $a \mathscr{R} b$ فإن $\mathscr{E}_{\mathscr{R}}(a) = \mathscr{E}_{\mathscr{R}}(b)$. أمــا إذا كــان $a \not\mathscr{R} b$ فإن $\mathscr{E}_{\mathscr{R}}(a) \cap \mathscr{E}_{\mathscr{R}}(b) = \phi$. وبذلك يتحقق شرط التباعد. وبأخذ جميع عناصر المجموعة A فإن $\bigcup_{a\in A} \mathscr{E}_{\mathscr{R}}(a) = A$. وبذلـــك يتحقــق شــرط الشمول. وبتحقق الشرطين فإن النظرية تثبت.

عكس النظرية

ليكن $\mathscr{P}$ تجزيئا على مجموعة A. فإن هذا التجزيء يُعَرِّف علاقة تكافؤ $\mathscr{R}$ على A كالآتى:

$a \mathscr{R} b$ إذا كان a ، b ينتميان لنفس القسم.

(أ) العلاقة عاكسة حيث أن أى عنصر ينتمى لنفس القسم الذى يحتويه. أى أن:

$$a \mathscr{R} a \qquad \forall a \in A$$

(ب) العلاقة متماثلة حيث أنه إذا كان $a \mathscr{R} b$ فإن b تنتمى لنفس القسم الذى تنتمى إليه a. إذن $b \mathscr{R} a$.

(ج) العلاقة ناقلة حيث أنه إذا كان $a \mathscr{R} b$ ، $b \mathscr{R} c$ فإن b تنتمى لنفس القســم

الذى تنتمى إليه a ، c تنتمى لنفس القسم الذى تنتمى إليه b. إذن c تنتمى لنفس القسم الذى تنتمى إليه a. أى $a \mathcal{R} c$.

مثال (٢)

لتكن " ~" معرفة على $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ كالآتى:

$$[(m , n) \sim (p , q)] \Leftrightarrow [m + q = n + p]$$

أثبت أن العلاقة " ~ " علاقة تكافؤ وأوجد فصول التكافؤ.

الحـــل

(أ) حيث أن $m + n = n + m$ ، إذن $(m,n) \sim (m,n)$

∴ العلاقة " ~ " عاكسة على $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ (١)

(ب) حيث أن:

$$m + q = n + p \Rightarrow p + n = q + m$$

إذن

$$(m , n) \sim (p , q) \Rightarrow (p , q) \sim (m , n)$$

∴ العلاقة " ~ " متماثلة على $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ (٢)

(ج) حيث أن:

$$m + q = n + p \, , \, p + s = q + r \Rightarrow m + s = n + r$$

إذن:

$$[(m, n) \sim (p , q)] , [(p , q) \sim (r , s)] \Rightarrow [(m , n) \sim (r , s)]$$

∴ العلاقة " ~ " ناقلة على $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ (٣)

من(١)، (٢)، (٣) نستنتج أن العلاقة " ~ " هى علاقة تكافؤ على $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$.

وبكتابة $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ بالصورة:

(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	....
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	....
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	....
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	....
⋮	⋮	⋮	⋮	

نجد أن فصول التكافؤ هى:

.... ,

$[4,1] = \{(4,1), (5,2), (6,3), (7,4), \ldots\},$

$[3,1] = \{(3,1), (4,2), (5,3), (6,4), \ldots\},$

$[2,1] = \{(2,1), (3,2), (4,3), (5,4), \ldots\},$

$[1,1] = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), \ldots\},$

$[1,2] = \{(1,2), (2,3), (3,4), (4,5), \ldots\},$

$[1,3] = \{(1,3), (2,4), (3,5), (4,6), \ldots\},$

$[1,4] = \{(1,4), (2,5), (3,6), (4,7), \ldots\},$

....

مثال (٣)

لتكن L مجموعة المستقيمات فى المستوى ولتكن "//" هى علاقة التوازى على L. أثبت أن هذه العلاقة هى علاقة تكافؤ ووضح فصول التكافؤ.

الحـــــل

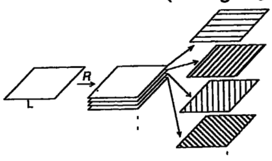
(أ) العلاقة "//" عاكسة على L حيث أن أى مستقيم يوازى نفسه.

(ب) العلاقة "//" متماثلة على L حيث أنه إذا وازى المستقيم ع المستقيم ه فـــإن

المستقيم a يوازى المستقيم c.

(ج) العلاقة "//" ناقلة على L حيث أن المستقيمان الموازيان لثالث متوازيان.

العلاقة " // " هى علاقة تكافؤ على L. فصول التكافؤ الناتجة من هذه العلاقة هى مجموعات مستقيمات متوازية يقال لها تحاذيات، كل تحاذ يوازى مستقيما معينا (انظر شكل ٥-١٤).



شكل ٥-١٤

٥-٩ علاقة الترتيب الجزئى Partial Order Relation

يقال أن العلاقة $\mathscr{R}$ هى علاقة ترتيب جزئى على مجموعة A إذا وفقط إذا تحققت الشروط الآتية مجتمعة:

(أ) $\mathscr{R}$ عاكسة على A.

(ب) $\mathscr{R}$ شبه متماثلة على A.

(ج) $\mathscr{R}$ ناقلة على A.

مثال (١)

أثبت أن العلاقة " $\leq$ " هى علاقة ترتيب جزئى على مجموعة الأعداد الطبيعية N.

الحـــــل

(أ) العلاقة" $\leq$ " عاكسة على مجموعة الأعداد الطبيعية حيث أن كل عدد طبيعـــى أصغر من أو يساوى نفسه.

(ب) العلاقة " $\leq$ " شبه متماثلة على مجموعة الأعداد الطبيعية حيث أن:

$$[(m \leq n) \wedge (n \leq m)] \Rightarrow m = n \qquad \forall\, m, n \in \mathbf{N}$$

(ج) العلاقة " $\leq$ " ناقلة على مجموعة الأعداد الطبيعية حيث أن:

$$[(m \leq n) \wedge (n \leq p)] \Rightarrow (m \leq p) \qquad \forall\, m, n, p \in \mathbf{N}$$

إذن فالعلاقة " $\leq$" هى علاقة ترتيب جزئية على مجموعة الأعداد الطبيعية.

مثال (٢)

أثبت أن العلاقة " $\subset$" هى علاقة ترتيب جزئى على مجموعة القـــوة 2^A لأى مجموعة اختيارية A.

الحـــــل

(أ) العلاقة " $\subset$" عاكسة على 2^A حيث أن كل مجموعة هى مجموعة جزئية (غير فعلية) من نفسها. أى أن:

$$X \subset X \qquad \forall\, X \in 2^A$$

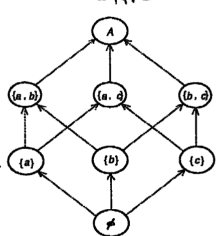
(ب) العلاقة " $\subset$" شبه متماثلة على 2^A حيث أن:

$$[(X \subset Y) \wedge (Y \subset X)] \Rightarrow (X = Y) \;\; \forall\, X, Y \in 2^A$$

(ج) العلاقة " $\subset$" ناقله على 2^A حيث أن:

$$(X \subset Y) \wedge (Y \subset Z) \Rightarrow (X \subset Z) \qquad \forall\, X, Y, Z \in 2^A$$

ويبين شكل (٥-١٥) الشكل المتجه لتلك العلاقة عندما تكون $A = \{a, b, c\}$.



شكل ٥–١٥

٥ـ١٠ علاقة الترتيب الكلى Total Order Relation

يقال أن العلاقة $\mathscr{R}$ هى علاقة ترتيب كلى على A إذا وفقط إذا تحقق الشرطان الآتيان مجتمعين:

(أ) $\mathscr{R}$ علاقة ترتيب جزئى على A.

(ب) لكل عنصرين a ، b ينتميان للمجموعة A فإن أحدهما لابد أن يكون على علاقة $\mathscr{R}$ مع الآخر. أى أن:

$$(a\,\mathscr{R}\,b)\ \underline{\vee}\ (b\,\mathscr{R}\,a) \qquad \forall\, a, b \in \mathrm{A}$$

مثال (١)

أثبت أن العلاقة "عامل من عوامل" هى علاقة ترتيب جزئى فقط على مجموعة الأعداد الطبيعية N.

الحـــل

(أ) كل عدد طبيعى عامل من عوامل نفسه.

∴ العلاقة عاكسة (١)

(جـ) إذا كان m عامل من عوامل n فليس من الضرورى أن تكون n عـــامل مـــن

عوامل m. إذن العلاقة ليست متماثلة؛ ولكن إذا حدث ذلك فإن $m = n$.

∴ العلاقة شبه متماثلة (٢)

(ج) إذا كان m عامل من عوامل n ، n عامل من عوامل p فإن m عـــامل مـــن عوامل p.

∴ العلاقة ناقلة (٣)

من (١) ، (٢) ، (٣) نستنتج أن العلاقة "عامل من عوامل" هى علاقة ترتيب جزئى على N. وإذا أخذنا أى عددين طبيعيين m ، n فليس من الضرورى أن يكون أحدهما عامل من عوامل الآخر.

∴ العلاقة "عامل من عوامل" هى علاقة ترتيب جزئى فقط على N.

مثال (٢)

أى من العلاقتين " $\subset$ " ، " $\leq$ " علاقة ترتيب كلى؟

الحـــــل

واضح أن الشرط الثانى لا ينطبق على العلاقة " $\subset$ " فى المثال السابق، وعلـــى سبيل المثال فإن: $b , c\} \not\subset \{a , c\} , \{a , c\} \not\subset \{b\}$

$, c\}$ إذن العلاقة " $\subset$ " ليست علاقة ترتيب كلى على 2^A .واضح أيضا أن العلاقة "$\leq$" علاقة ترتيب كلى على مجموعة الأعداد الطبيعية حيث أن:

$$(\forall\, m , n \in \mathrm{N}\,)\ (m \leq n) \underline{\vee} (n \leq m)$$

٥ـ١١ علاقة الترتيب القاطع Strict Order Relation

يقال أن العلاقة $\mathscr{R}$ هى علاقة ترتيب قاطع علـــى مجموعـــة A إذا توفـــرت الشروط الآتية:

(أ) $\mathscr{R}$. لا عاكسة على A،

(ب) $\mathscr{R}$ ناقلة على A،

(ج) $\mathscr{R}$ لا متماثلة على A.

ويمكن التغاضى عن الشرط (ج) حيث أنه يستنتج من الشرطين (أ) ، (ب) [حاول أن تثبت ذلك].

وكمثال على علاقة الترتيب القاطعة نأخذ العلاقة "$<$" على N فنجد أن:

(أ) "$<$" لا عاكسه على A حيث أن $m < n \Rightarrow n < m$.

(ب) "$<$" ناقلة على A حيث أن $(m < n),(n < p) \Rightarrow (m < p)$. إذن العلاقة "$<$" علاقة ترتيب قاطعة على N.

١٢ـ٥ مجال العلاقة ومداها The Domain and Range of a Relation

لتكن $\mathscr{R} \subset A \times B$ علاقة من A إلى B . يُعَرَّف مجال العلاقة $\mathscr{R}$ بأنه المجموعة الجزئية من A التى تظهر عناصرها كعنصر أول فى الزوج المرتب $(a,b) \in \mathscr{R}$. ويرمز لمجال العلاقة $\mathscr{R}$ بالرمز Dom ($\mathscr{R}$). كما يُعَرَّف مدى العلاقة $\mathscr{R}$ بأنه المجموعة الجزئية من B التى تظهر عناصرها كعنصر ثان فى الزوج المرتب $(a,b) \in \mathscr{R}$. ويرمز لمدى العلاقة $\mathscr{R}$ بالرمز Ran ($\mathscr{R}$).

مثال (١)

لتكن $A = \{1,2,3,4\}$ ، ولتكن $B = \{a,b,c\}$. أكتب مجال ومدى كل من العلاقتين الآتيتين:

$$\mathscr{R}_1 = \{(1,a),(1,b),(2,b),(3,a),(4,a)\}$$

$$\mathscr{R}_2 = \{(1,a),(1,c),(3,a),(3,c)\}$$

الحـــــل

$\text{Dom}(\mathscr{R}_1) = \{1,2,3,4\}$, $\text{Ran}(\mathscr{R}_1) = \{a,b\}$,

$\text{Dom}(\mathscr{R}_2) = \{1,3,4\}$, $\text{Ran}(\mathscr{R}_2) = \{a,c\}$.

٥-١٣ مسار العلاقة على مجموعة Path of a Relation on a Set

لتكن $\mathscr{R}$ علاقة على المجموعة A. يُعرف المسار الذى طولـــه n والذى يبدأ من العنصر $a \in A$ وينتهى بالعنصر $b \in A$ بأنه المتتابعة $(a, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, b)$ بحيث:

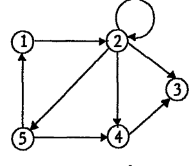
$$a\mathscr{R}x_1 \;,\; x_1\mathscr{R}x_2 \;,\; \ldots, x_{n-1}\mathscr{R}b$$

مثال

لنأخذ العلاقة $\mathscr{R}$ المعرفة على المجموعة $A = \{1,2,3,4,5\}$ كالآتى:

$$\mathscr{R} = \{(1,2)\,,\,(2,3)\,,\,(2,4)\,,\,(2,5)\,,\,(4,3)\,,\,(5,1)\,,\,(5,4)\}$$

والممثلة بالشكل الاتجاهى ٥-١٦.



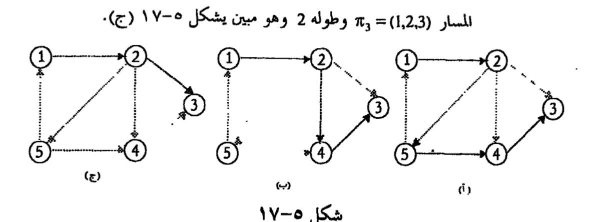
شكل ٥-١٦

من الشكل نجد أن لدينا ثلاثة مسارات من العنصر 1 إلى العنصر 3:

المسار $\pi_1 = (1,2,5,4,3)$ وطوله 4 وهو مبين بشكل ٥-١٧ (أ).

المسار $\pi_2 = (1,2,4,3)$ وطوله 3 وهو مبين بشكل ٥-١٧ (ب).

المسار $\pi_3 = (1,2,3)$ وطوله 2 وهو مبين بشكل ٥-١٧ (ج).



شكل ٥-١٧

٥-١٤ الدورات Cycles

المسار الذى يبدأ وينتهى من نفس الرأس يسمى دورة *Cycle* ؛ ففى المثال السابق المسار:

$$\pi_4 = (1,2,5,1)$$

هو دورة طولها 3 فى حين أن المسار:

$$\pi_5 = (2,2)$$

هو دورة طولها 1.

٥-١٥ العمليات على العلاقات Operations on Relations

نستطيع أن نكون علاقات جديدةبإجراء بعض العمليات كالآتى:

٥-١٥-١ العلاقة المكملة Complemenary Relation

لتكن $\mathscr{R}$ علاقة من A إلى B . تُعرف العلاقة المكملة $\mathscr{R}'$ من A إلى B كالآتى:

$$a\,\mathscr{R}'\,b \Leftrightarrow a\,\not{\mathscr{R}}\,b \quad \forall a \in A, b \in B$$

وإذا كانت $M_{\mathscr{R}}$ هى المصفوفة المنطقية الممثلة للعلاقة $\mathscr{R}$ فإن المصفوفة

المنطقية $\mathbf{M}_{\mathscr{R}'}$ الممثلة للعلاقة المكملة ' $\mathscr{R}$. تســـتنتج من $\mathbf{M}_{\mathscr{R}}$ باستبدال 1 بـــ 0 ، 0 بـــ 1 .

مثال

لتكن $A = \{1,2,3,4\}$ ، $B = \{a,b,c\}$ ، ولتكن $\mathscr{R}$. علاقة من A إلى B معرفة كالآتى:

$$\mathscr{R} = \{(1,b),(1,c),(2,c),(3,a),(4,b)\}$$

أوجد العلاقة المكملة واكتب مصفوفتها المنطقية.

مثال

المصفوفة المنطقية للعلاقة $\mathscr{R}$ هى:

$$\mathbf{M}_{\mathscr{R}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

إذن المصفوفة المنطقية للعلاقة $\mathscr{R}$ هى:

$$\mathbf{M}_{\mathscr{R}'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

إذن فالعلاقة المكملة ' $\mathscr{R}$ تعرف كالآتى:

$$\mathscr{R}' = \{(1,a),(2,a),(2,b),(3,b),(3,c)(4,a),(4,c)\}$$

٥-١٥-٢ معكوس العلاقة Inverse Relation

لتكن $\mathscr{R}$ علاقة من A إلى B . فإن معكوس العلاقة $\mathscr{R}^{-1}$ هى علاقة من B إلى A تُعرف كالآتى:

$$b\,\mathcal{R}^{-1}a \Leftrightarrow a\,\mathcal{R}\,b \quad \forall a\in \mathrm{A}\,,b\in \mathrm{B}$$

وإذا كانت $\mathbf{M}_{\mathcal{R}}$ هى المصفوفة المنطقية الممثلة للعلاقة $\mathcal{R}$ فإن المصفوفة المنطقية $\mathbf{M}_{\mathcal{R}^{-1}}$ لمعكوس العلاقة هى مدور المصفوفة $\mathbf{M}_{\mathcal{R}}$. أى أن:

$$\mathbf{M}_{\mathcal{R}^{-1}} = (\mathbf{M}_{\mathcal{R}})^{\mathrm{T}} \quad .$$

ففى المثال السابق:

$$\mathbf{M}_{\mathcal{R}^{-1}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

لذا فإن:

$$\mathcal{R}^{-1} = \{(a,3),(b,1),(b,4),(c,1),(c,2)\}$$

٥-١٥-٣ علاقة الاتحاد Union Relation

لتكن كلا من $\mathcal{R}$ ، $\mathcal{S}$ علاقة من A إلى B . تُعرف علاقة الاتحاد $\mathcal{R} \cup \mathcal{S}$ من A إلى B كالآتى:

$$a\,(\mathcal{R}\cup\mathcal{S})\,b \Leftrightarrow a\,\mathcal{R}\,b \text{ أو } a\,\mathcal{S}\,b \quad \forall a\in \mathrm{A}\,,b\in \mathrm{B}$$

وإذا كانت $\mathbf{M}_{\mathcal{R}}$ هى المصفوفة المنطقية الممثلة للعلاقة $\mathcal{R}$ ، $\mathbf{M}_{\mathcal{S}}$ هى المصفوفة المنطقية الممثلة للعلاقة $\mathcal{S}$ فإن المصفوفة المنطقية لعلاقة الاتحاد $\mathcal{R}\cup\mathcal{S}$ هى مصفوفة الوصل $\mathbf{M}_{\mathcal{R}} \vee \mathbf{M}_{\mathcal{S}}$.

مثال

لتكن $\mathrm{A} = \{1,2,3,4\}$ ، $\mathrm{B} = \{a,b,c\}$ ، ولتكن $\mathcal{R}$ ، $\mathcal{S}$ علاقتين من A إلى B معرفتين كالآتى:

$$\mathcal{R} = \{(1,b),(1,c),(2,c),(3,a),(4,b)\}$$

$\mathscr{S} = \{(1,a),(1,b),(2,b),(2,c),(3,b),(4,a)\}$

أوجد علاقة الاتحاد $\mathscr{R} \cup \mathscr{S}$ ومصفوفتها المنطقية.

الحل

المصفوفة المنطقية للعلاقتين $\mathscr{R}$ ، $\mathscr{S}$ هما على الترتيب:

$$\mathbf{M}_{\mathscr{R}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{M}_{\mathscr{S}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

المصفوفة المنطقية لعلاقة الاتحاد هى:

$$\mathbf{M}_{\mathscr{R} \cup \mathscr{S}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \vee \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

إذن فعلاقة الاتحاد هى:

$$\mathscr{R} \cup \mathscr{S} = \{(1,a),(1,b),(1,c),(2,b),(2,c),(3,a),(3,b),(4,a),(4,b)\}$$

٥-١٥-٤ علاقة التقاطع Intersection

لتكن كلا من $\mathscr{R}$ ، $\mathscr{S}$ علاقة من A إلى B . تُعرف علاقة التقاطع $\mathscr{R} \cap \mathscr{S}$ من A إلى B كالآتى:

$$a\,(\mathscr{R} \cap \mathscr{S})\,b \Leftrightarrow a\,\mathscr{R}\,b \;,\; a\,\mathscr{S}\,b \quad \forall a \in \mathrm{A}, b \in \mathrm{B}$$

وإذا كانت $\mathbf{M}_{\mathscr{R}}$ هى المصفوفة المنطقية الممثلة للعلاقة $\mathscr{R}$ ، $\mathbf{M}_{\mathscr{S}}$ هى المصفوفة المنطقية الممثلة للعلاقة $\mathscr{S}$ فإن المصفوفة المنطقية لعلاقة التقاطع $\mathscr{R} \cap \mathscr{S}$ هى مصفوفة الملتقى $\mathbf{M}_{\mathscr{R}} \wedge \mathbf{M}_{\mathscr{S}}$.

مثال

فى المثال السابق مصفوفة الملتقى هى:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

إذن فإن علاقة التقاطع هى:

$$\mathscr{R} \cap \mathscr{S} = \{(1,b),(2,c)\}$$

٥-١٥-٥ علاقات الفرق Difference Relations

لتكن كلا من $\mathscr{R}$ ، $\mathscr{S}$ علاقة من A إلى B . تُعرف علاقة الفرق $\mathscr{R}-\mathscr{S}$ من A إلى B كالآتى:

$$a\,(\mathscr{R}-\mathscr{S})\,b \Leftrightarrow a\,\mathscr{R}\,b\ ,\ a\,\mathscr{S}\,b\ \ \forall a \in \mathrm{A}, b \in \mathrm{B}$$

وإذا كانت $\mathbf{M}_{\mathscr{R}}$ هى المصفوفة المنطقية الممثلة للعلاقة $\mathscr{R}$ ، $\mathbf{M}_{\mathscr{S}}$ هى المصفوفة المنطقية الممثلة للعلاقة $\mathscr{S}$ فإن المصفوفة المنطقية لعلاقة الفرق $\mathscr{R}-\mathscr{S}$ هى المصفوفة $\mathbf{M}_{\mathscr{R}} \wedge \mathbf{M}'_{\mathscr{S}}$.

وبالمثل تُعرف علاقة الفرق $\mathscr{S}-\mathscr{R}$ من A إلى B كالآتى:

$$a\,(\mathscr{S}-\mathscr{R})\,b \Leftrightarrow a\,\mathscr{S}\,b\ ,\ a\,\mathscr{R}\,b\ \ \forall a \in \mathrm{A}, b \in \mathrm{B}$$

وإذا كانت $\mathbf{M}_{\mathscr{R}}$ هى المصفوفة المنطقية الممثلة للعلاقة $\mathscr{R}$ ، $\mathbf{M}_{\mathscr{S}}$ هى المصفوفة المنطقية الممثلة للعلاقة $\mathscr{S}$ فإن المصفوفة المنطقية لعلاقة الفرق $\mathscr{R}-\mathscr{S}$ هى المصفوفة $\mathbf{M}'_{\mathscr{R}} \wedge \mathbf{M}_{\mathscr{S}}$.

وتُعرَّف علاقة الفرق المتماثل $\mathscr{R}\Delta\mathscr{S}$ كالآتى:

$$\mathscr{R}\Delta\mathscr{S} = (\mathscr{R} - \mathscr{S}) \cup (\mathscr{S} - \mathscr{R})$$

أما مصفوفتها المنطقية فهى:

$$\mathbf{M}_{\mathscr{R}\Delta\mathscr{S}} = \mathbf{M}_{\mathscr{R}-\mathscr{S}} \vee \mathbf{M}_{\mathscr{S}-\mathscr{R}} = (\mathbf{M}_{\mathscr{R}} \wedge \mathbf{M}'_{\mathscr{S}}) \vee (\mathbf{M}'_{\mathscr{R}} \wedge \mathbf{M}_{\mathscr{S}})$$

مثال .

لتكن $A = \{1,2,3,4\}$ ، $B = \{a,b,c\}$ ، ولتكن $\mathscr{R}$ ، $\mathscr{S}$ علاقتين من A إلى B معرَّفتين كالآتى:

$$\mathscr{R} = \{(1,b),(1,c),(2,c),(3,a),(4,b)\}$$

$$\mathscr{S} = \{(1,a),(1,b),(2,b),(2,c),(3,b),(4,a)\}$$

أوجد علاقتى الفرق $\mathscr{R}-\mathscr{S}$ ، $\mathscr{S}-\mathscr{R}$ والمصفوفة المنطقية لكل منهما. أوجد أيضا علاقة الفرق المتماثل ومصفوفتها المنطقية.

الحل

$$\mathbf{M}_{\mathscr{R}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{M}_{\mathscr{S}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{M}'_{\mathscr{R}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{M}'_{\mathscr{S}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

إذن فإن المصفوفتين المنطقيتين لعلاقتى الفرق هما:

$$\mathbf{M}_{\mathscr{R}-\mathscr{S}} = \mathbf{M}_{\mathscr{R}} \wedge \mathbf{M}'_{\mathscr{S}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{M}_{\mathscr{S}-\mathscr{R}} = \mathbf{M}'_{\mathscr{R}} \wedge \mathbf{M}_{\mathscr{S}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{\mathscr{R}\Delta\mathscr{S}} = \mathbf{M}_{\mathscr{R}-\mathscr{S}} \vee \mathbf{M}_{\mathscr{S}-\mathscr{R}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \vee \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

٥-١٥-٦ خواص العمليات على العلاقات Properties of Operatiohs on Relations

تتمتع العمليات على العلاقات بالخواص الآتية التى تعتمد فى برهانها على جبر المجموعات:

١. إذا كانت $\mathscr{R}$ ، $\mathscr{S}$ علاقتين من A إلى B فإن:

$\mathscr{R} \subset \mathscr{S} \Rightarrow \mathscr{S}' \subset \mathscr{R}'$ ، $\mathscr{R} \subset \mathscr{S} \Rightarrow \mathscr{R}^{-1} \subset \mathscr{S}^{-1}$ ،

$(\mathscr{R} \cap \mathscr{S})' = \mathscr{R}' \cup \mathscr{S}'$ ، $(\mathscr{R} \cup \mathscr{S})' = \mathscr{R}' \cap \mathscr{S}'$ ،

$(\mathscr{R} \cap \mathscr{S})^{-1} = \mathscr{R}^{-1} \cup \mathscr{S}^{-1}$ ، $(\mathscr{R} \cup \mathscr{S})^{-1} = \mathscr{R}^{-1} \cap \mathscr{S}^{-1}$

٢. $\mathscr{R}$ علاقة عاكسة على A $\Leftarrow$ $\mathscr{R}'$ لا عاكسة ، $\mathscr{R}^{-1}$ عاكسة على A

٣. إذا كانت $\mathscr{R}$ علاقة على A فإن:

$\mathscr{R}$ متماثلة $\Leftrightarrow$ $\mathscr{R} = \mathscr{R}^{-1}$ ، $\mathscr{R}$ لا متماثلة $\Leftrightarrow$ $\mathscr{R} \cap \mathscr{R}^{-1} = \phi$

$\mathscr{R}$: متخالفة $\Leftrightarrow$ $\mathscr{R} \cap \mathscr{R}^{-1}$. هي علاقة التساوى

٤. $\mathscr{R}$ ، $\mathscr{S}$ عاكستان على A $\Leftarrow$ $\mathscr{R} \cup \mathscr{S}$ ، $\mathscr{R} \cap \mathscr{S}$: عاكستان على A.

$\mathscr{R}$ ، $\mathscr{S}$ متماثلتان على A $\Leftarrow$ $\mathscr{R} \cup \mathscr{S}$ ، $\mathscr{R} \cap \mathscr{S}$ متماثلتان على A.

$\mathscr{R}$ ، $\mathscr{S}$ علاقتا تكافؤ على A $\Leftarrow$ $\mathscr{R} \cup \mathscr{S}$ ، $\mathscr{R} \cap \mathscr{S}$ علاقتا تكافؤ على A.

$\mathscr{R}$ ، $\mathscr{S}$ ناقلتان على A $\Leftarrow$ $\mathscr{R} \cap \mathscr{S}$ ناقلة على A.

٥-١٦ علاقة الكمال **Closure Relation**

لتكن $\mathscr{R}$ علاقة على مجموعة A، ولنفرض أن العلاقة ?? ينقصها بعض الأزواج المرتبة حتى تحقق خاصية معينة (مثل التماثل أو النقل أو التكافؤ). فإن أصغر علاقة تحتوى $\mathscr{R}$ وتحقق تلك الخاصية بالنسبة لتلك الخاصية وسنرمز لها بالرمز $\mathscr{R}^c$.

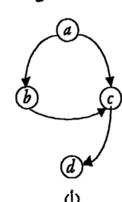
مثال

لتكن $A = \{a, b, c, d\}$ ولتكن $\mathscr{R} = \{(a,b),(a,c),(b,c),(c,d)\}$. أوجد

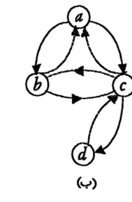
علاقة الكمال للعلاقة $\mathcal{R}$ بالنسبة لخاصية التماثل.

الحل

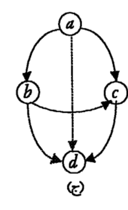
شكل ٥-١٨(أ) يمثل العلاقة $\mathcal{R}$ وشكل ٥- ١٨(ب) يمثل علاقة الكمال $\mathcal{R}^{c_1}$ بالنسبة لخاصية التماثل وشكل ٥- ١٨(ج) يمثل علاقة الكمــــال $\mathcal{R}^{c_2}$ بالنسبة لخاصية النقل.



(أ)



(ب)



(ج)

شكل ٥-١٨

من الشكل يتضح أن:

$$\mathcal{R}^{c_1} = \{(a,b),(a,c),(b,a),(b,c),(c,a),(c,b),(c,d),(d,c)\},$$

$$\mathcal{R}^{c_2} = \{(a,b),(a,c),(a,d),(b,c),(b,d),(c,d)\}$$

٥-١٧ تركيب العلاقات Composition of Relations

لتكن $\mathcal{R}$ علاقة من المجموعة A إلى المجموعة B ، ولتكن $\mathcal{S}$ علاقة من المجموعة B إلى المجموعة C. فإن العلاقة $\mathcal{S}\circ\mathcal{R}$ الناتجة من تركيب $\mathcal{S}$ بعد $\mathcal{R}$ هى علاقة من المجموعة A إلى المجموعة C تعرف كالآتى:

$$a\,(\mathcal{S}\circ\mathcal{R})\,c \Leftrightarrow \exists\, b\in \text{B such that } a\mathcal{R}\,b\,,\, b\mathcal{S}\,c \quad \forall a\in \text{A},\, c\in \text{C}$$

مثال

لتكن $A = \{1,2,3,4\}$ ، $B = \{a,b,c\}$ ، $B = \{a,b,c\}$ ، $C = \{\square, \bigcirc\}$ ؛

ولتكن:

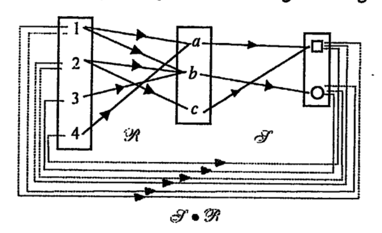
$\mathscr{R} = \{(1,a),(1,b),(2,b),(2,c),(3,b),(4,a)\}$ ،

$\mathscr{S} = \{(a,\square),(b,\bigcirc),(c,\square)\}$

أوجد $\mathscr{S} \circ \mathscr{R}$.

الحل

شكل ٥-١٩ يمثل العلاقتين $\mathscr{R}$ ، $\mathscr{S}$ وعلاقة التركيب $\mathscr{S} \circ \mathscr{R}$.



شكل ٥-١٩

من الشكل نجد أن:

$$\mathscr{S} \circ \mathscr{R} = \{(1,\square),(1,\bigcirc),(2,\square),(2,\bigcirc),(3,\bigcirc),(4,\square)\}$$

ومن الواضح أن العلاقة $\mathscr{R} \circ \mathscr{S}$ لا يمكن تعريفها جنبا إلى جنب مع $\mathscr{S} \circ \mathscr{R}$ إلا إذا كان $A = B = C$. وحتى فى هذه الحالة فإننا لا نضمن أن تتساوى

$\mathscr{S} \circ \mathscr{R}$ مع $\mathscr{R} \circ \mathscr{S}$.

مثال

لتكن $\mathscr{R}$ ، $\mathscr{S}$ معرفتين على $A = \{1,2,3,4\}$ كالآتى:

$$\mathscr{R} = \{(1,1),(1,3),(2,2),(2,4),(3,3),(4,4)\},$$

$$\mathscr{S} = \{(1,2),(1,4),(2,3),(2,4),(3,1),(4,3)\}$$

فإن:

$$\mathscr{S} \circ \mathscr{R} = \{(1,2),(1,4),(1,1),(2,3),(2,4),(3,1),(4,3)\}$$

فى حين أن:

$$\mathscr{R} \circ \mathscr{S} = \{(1,2),(1,4),(1,1),(2,3),(2,4),(3,1),(3,3),(4,3)\}$$

نظرية

لتكن $\mathscr{R}$ علاقة من المجموعة A إلى المجموعة B ، ولتكن $\mathscr{S}$ علاقة من المجموعة B إلى المجموعة C. إذا كانت $\mathbf{M}_{\mathscr{R}}$ هى المصفوفة المنطقية الممثلة للعلاقة $\mathscr{R}$ ، $\mathbf{M}_{\mathscr{S}}$ هى المصفوفة المنطقية الممثلة للعلاقة $\mathscr{S}$ فإن:

$$\mathbf{M}_{\mathscr{S} \circ \mathscr{R}} = \mathbf{M}_{\mathscr{R}} \otimes \mathbf{M}_{\mathscr{S}}$$

حيث $\mathbf{M}_{\mathscr{S} \circ \mathscr{R}}$ هى المصفوفة المنطقية للعلاقة $\mathscr{S} \circ \mathscr{R}$ الناتجة من تركيب $\mathscr{S}$ بعد $\mathscr{R}$.

وبرهان هذه النظرية ينتج من تعريف ضرب المصفوفات المنطقية.

لتكن $\mathscr{R}$ ، $\mathscr{S}$ معرفتين على $A = \{1,2,3,4\}$ كالآتى:

$$\mathscr{R} = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,4),(3,2)\},$$

$\mathcal{S} = \{(1,4),(1,3),(3,1),(4,1)\}$

أوجد المصفوفة المنطقية لكل من $\mathcal{R}$ ، $\mathcal{S}$ ومن ثم أوجد $\mathcal{R}\circ\mathcal{S}$ ، $\mathcal{S}\circ\mathcal{R}$ ..

الحل

$$\mathbf{M}_{\mathcal{R}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{M}_{\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{\mathcal{S}\circ\mathcal{R}} = \mathbf{M}_{\mathcal{R}} \otimes \mathbf{M}_{\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{\mathcal{R}\circ\mathcal{S}} = \mathbf{M}_{\mathcal{S}} \otimes \mathbf{M}_{\mathcal{R}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

أمثلة متنوعة

مثال (١)

حدد نوع كل من العلاقات الآتية على N:

(أ) عامل من عوامل   (ب) ضعف.

الحـــــل

(أ) كل عدد عامل من عوامل نفسه.

إذن العلاقة عاكسة   (١)

إذا كان m عامل من عوامل n فليس من الضرورى أن تكون n عامل من عوامل m . إذن العلاقة ليست متماثلة؛ ولكن اذا حدث ذلك فان $m = n$.

إذن العلاقة شبه متماثلة (٢)

إذا كان m عامل من عوامل n ، n عامل من عوامل p فان m عامل من عوامل p.

إذن العلاقة ناقلة (٣)

من (١) ، (٢) ، (٣) نستنتج أن العلاقة "عامل من عوامل" هى علاقة ترتيب على N .

وإذا أخذنا أى عددين $m,n \in \mathbf{N}$ فليس من الضرورى أن يكون أحدهما عامل من عوامل الآخر.

إذن العلاقة "عامل من عوامل" هى علاقة ترتيب جزئى على N.

(ب) أى عدد ليس ضعف نفسه.

إذن العلاقة ليست عاكسة (١)

إذا كان m ضعف n فإن n ليس ضعف m.

إذن العلاقة متخالفة (٢)

ضعف الضعف ليس ضعفا.

إذن العلاقة ليست ناقلة (٣)

لذا فان العلاقة "ضعف" هى علاقة تخالف فقط على N.

مثال (٢)

لتكن " ~ " معرفة على N × N كالآتى:

$$(m,n) \sim (p,q) \Leftrightarrow m+q=n+p$$

أثبت أن العلاقة " ~ " هى علاقة تكافؤ وأوجد فصول التكافؤ.

الحـــــل

حيث أن $m+n=n+m$ ، إذن $(m,n)\sim(m,n)$ إذن العلاقة" ~ " علاقة عاكسة على $N \times N$ (١)حيث أن:

$$m+q=n+p \Rightarrow p+n=q+m.$$

إذن:

$$(m,n)\sim(p,q) \Rightarrow (p,q)\sim(m,n)$$

إذن العلاقة " ~ " متماثلة على $N \times N$ (٢)

حيث أن:

$$m+q=n+p,\ p+s=q+r \Rightarrow m+s=n+r$$

إذن:

$$(m,n)\sim(p,q)\ ,\ (p,q)\sim(r,s) \Rightarrow (m,n)\sim(r,s)$$

إذن العلاقة " ~ " ناقلة على $N \times N$ (٣)

من (١) ، (٢) ، (٣) نستنتج أن العلاقة " ~ " علاقة تكافؤ على $N \times N$. بكتابة $N \times N$ بالصورة:

(1,1) , (1,2) , (1,3) , (1,4) , ...,
(2,1) , (2,2) , (2,3) , (2,4) , ...,
(3,1) , (3,2) , (3,3) , (3,4) , ...,
(4,1) , (4,2) , (4,3) , (4,4) , ...,
....

نجد أن فصول التكافؤ هى:

$$\ldots,\ \{(1,2),(2,3),(3,4),(4,5),\ldots\},\ \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),\ldots\},$$

$\{(2,1), (3,2), (4,3), (5,4), \ldots\}, \{(3,1), (4,2), (5,3), (6,4), \ldots\}, \ldots$

مثال (٣)

أكتب العلاقة على المجموعة $A = \{a, b, c, d, e\}$ التى مصفوفتها المنطقية هى:

$$M_{\mathscr{R}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

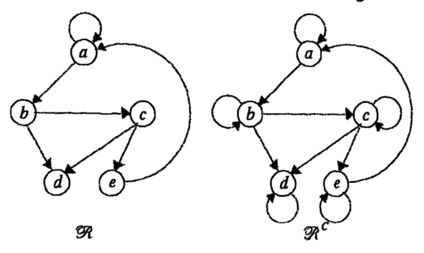
وارسم شكلها المتجه. أوجد علاقة الكمال لها بالنسبة لخاصية الانعكاس.

الحـــل

العلاقة هى:

$$\mathscr{R} = \{(a,a), (a,b), (b,c), (b,d), (c,d), (c,e), (e,a)\}$$

ويبين شكل ٥-٢٠ العلاقة $\mathscr{R}$ وعلاقة الكمال $\mathscr{R}^c$ بالنسبة لخاصية الانعكاس.



شكل ٥-٢٠

إذن:

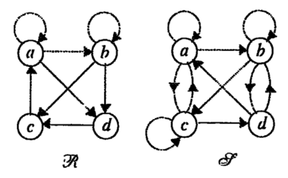
$$\mathcal{R}^c = \{(a,a),(a,b),(b,b),(b,c),(b,d),(c,c),(c,d),(c,e),(d,d),(e,a),(e,e)\}$$

ومصفوفتها المنطقية هى:

$$\mathbf{M}_{\mathcal{R}^c} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

مثال (٣)

أوجد المصفوفة المنطقية لكل من العلاقتين $\mathcal{R}$، $\mathcal{S}$ الموضحتين بشكل ٥-٢١:



شكل ٥-٢١

ومن ثم أوجد $\mathcal{R}'$ ، $\mathcal{R}\cap\mathcal{S}$ ، $\mathcal{R}\cup\mathcal{S}$ ، $\mathcal{S}^{-1}$.

$$\mathbf{M}_{\mathcal{R}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{M}_{\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{\mathscr{R}'}=\begin{bmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&0\\1&1&1&0\\0&1&1&0\end{bmatrix},\ \mathbf{M}_{\mathscr{S}^{-1}}=\begin{bmatrix}1&0&1&1\\1&1&1&0\\0&1&0&1\\1&1&1&1\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{\mathscr{R}\cap\mathscr{S}}=\begin{bmatrix}1&1&1&0\\0&1&1&1\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{bmatrix}\wedge\begin{bmatrix}1&1&0&1\\0&1&1&1\\1&1&0&1\\1&0&1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&1&1&1\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{\mathscr{R}\cap\mathscr{S}}=\begin{bmatrix}1&1&1&0\\0&1&1&1\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{bmatrix}\vee\begin{bmatrix}1&1&0&1\\0&1&1&1\\1&1&0&1\\1&0&1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\1&1&1&1\\1&0&1&1\end{bmatrix}$$

$$\therefore\quad \mathscr{R}'=\{(a,d),(b,a),(c,a),(c,b),(c,c),(d,b),(d,c)\},$$

$$\mathscr{S}^{-1}=\{(a,a),(a,c),(a,d)(b,a),(b,b),(b,c),(c,a),(c,b),(c,d),(d,a),(d,c),(d,d)\},$$

$$\mathscr{R}\cap\mathscr{S}=\{(a,a),(a,b),(a,d),(b,b),(b,c),(b,d),(c,d),(d,a)\},$$

$$\mathscr{R}\cup\mathscr{S}=\{(a,a),(a,b),(a,c),(a,d),(b,b),(b,c),(b,d),(c,a),(c,b),(c,c),(c,d),(d,a),(d,c),(d,d)\}$$

تمريـــــن ٥-١

١. بين أى من العلاقات الآتية عاكسة - متماثلة - لا متماثلة - شبـــه متماثلـــة - تكافؤ - ترتيب على **N**:

(أ) عامل من عوامل. (ب) نصف.

(ج) يساوى. (د) أقل من.

٢. حدد نوع كل من العلاقات الآتية على **R**:

(أ) $x \mathbf{R} y \Leftrightarrow x < y$ (ب) $x \mathbf{R} y \Leftrightarrow x + y + 1 = 1$

(ج) $x \mathbf{R} y \Leftrightarrow xy$ (د) $x \mathbf{R} y \Leftrightarrow x + y = 1$

(هـ) $x \mathbf{R} y \Leftrightarrow x + y > 2$

(

٣. مثل كلا من العلاقات الآتية على $\mathbf{R}$:

(أ) $\mathscr{R} = \{(x,y): x < y\}$; (ب) $\mathscr{R} = \{(x,y): x = y\}$;

(ج) $\mathscr{R} = \{(x,y): x = y, y = 2\}$;

٤. لتكن $X = \{1,2,3,4\}$ ولتكن العلاقة $\mathscr{R}$ معرفة على X كالآتى:

$$A \mathscr{R} B \Leftrightarrow \#(A) = \#(B) \quad \forall A,B \in P(X)$$

حيث $\#(A)$ ترمز لعدد عناصر المجموعة A، $\#(B)$ ترمز لعدد عناصر المجموعة B.

أثبت أن $\mathscr{R}$ علاقة تكافؤ وأوجد فصل التكافؤ الذى عنصره الممثل المجموعة $\{1,2\}$.

٥. أوجد عدد العلاقات العاكسة وعدد العلاقات المتماثلة على مجموعة عدد عناصرها n.

٦. أى من العلاقات الآتية تكافؤ؟

(أ) $m \mathscr{R} n \Leftrightarrow m = n \;\; \forall m,n \in \mathbf{N}$ (ب) $x \mathscr{R} y \Leftrightarrow x < y \;\; \forall x,y \in \mathbf{R}$

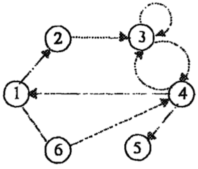
(ج) $m \mathscr{R} n \Leftrightarrow m = n \;\; \forall m,n \in \mathbf{Z}$ (د) $x \mathscr{R} y \Leftrightarrow x = y \;\; \forall x,y \in \mathbf{R}$

٧. أكتب العلاقة التى مصفوفتها المنطقية:

$$M_{\mathcal{R}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

وارسم شكلها المتجه. أوجد علاقة الكمال لها بالنسبة لخاصية النقل.

٩. في الشكل المتجه الآتي:



(أ) أكتب جميع المسارات ذات طول 1 وذات طول 2 وذات طول 3.

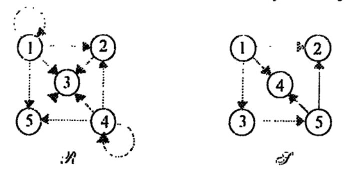
(ب) أكتب جميع المسارات التي تبدأ من ٢والتي تبدأ من 6.

١٠. حدد نوع كل من العلاقات الآتية (عاكسة – متماثلة – لا متماثلة – شبه متماثلة – تكافؤ – ترتيب):

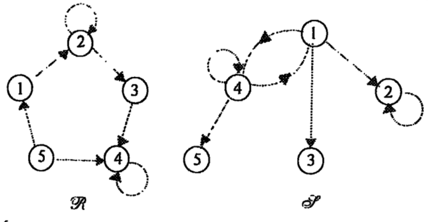
(أ) على $A = \{1,2,3,4\}$ والتي مصفوفتها المنطقية هي:

$$M_{\mathcal{R}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad M_{\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(ب) التي شكلها المتجه هو :



١١. أكتب العلاقتين المبينتين بالشكلين الآتيين وأكتب مصفوفتيهما المنطقيتين:



١٢. إذا كانت $\mathscr{R}$ علاقة من A إلى B ، $\mathscr{S}$ ، $\mathscr{T}$ علاقتين من B إلى C فاثبت أن:

(أ) $(\mathscr{S} \cup \mathscr{T}) \circ \mathscr{R} = (\mathscr{S} \circ \mathscr{R}) \cup (\mathscr{T} \circ \mathscr{R})$

(ب) $(\mathscr{S} \cap \mathscr{T}) \circ \mathscr{R} = (\mathscr{S} \circ \mathscr{R}) \cap (\mathscr{T} \circ \mathscr{R})$

الباب السادس

الرواســـــم

MAPPINGS

٦-١ تعريف

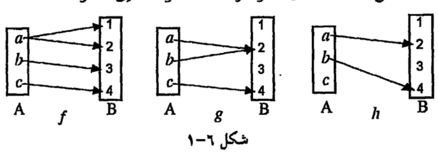
لتكن $\mathscr{R}$ علاقة من A إلى B. إذا كان لكل $a \in A$ يوجد عنصر واحد فقط $b \in B$ بحيث $a \mathscr{R} b$ فإن هذه العلاقة تسمى راسما *mapping* للمجموعة A إلى المجموعة B وعندئذ نكتب $\mathscr{R} : A \to B$. وتمييزا للرواسم عن العلاقـــات سنستخدم الرمزز f , g , h , ... بدلا من الرمز $\mathscr{R}$. أى أن:

$$f : A \to B \overset{def}{\Leftrightarrow} \forall a \in A,\ \exists! b \in B \text{ such that } (a,b) \in f \subset A \times B$$

وبدلا من كتابة $a f b$ للدلالة على أن (a , b) ينتمى للراســـم f ســنكتب $a \overset{f}{\mapsto} b$ وتقرأ "العنصر a يرسم إلى العنصــــر b بواســطة الراســم f" أو $b = f(a)$ وتقرأ " b هى صورة العنصر a بالنسبة للراسم f" ويكون عندئذ العنصر a "أصلا" للعنصر b بالنسبة للراسم f.

مثال (١)

أى من العلاقات الآتية تكون راسما للمجموعة A إلى المجموعة B ؟ لماذا ؟



شكل ٦-١

الحـــــل

العلاقة f ليست راسما حيث أنالعنصر a له صورتان 1 ، 2.

العلاقة g راسم حيث أن لكل عنصر من عناصر A صورة واحده فقط فى B.

العلاقة h ليست راسما حيث أن العنصر c ليس له صورة فى B.

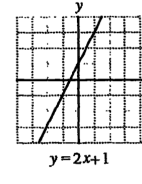
مثال (٢)

أى من العلاقات الآتية تكون راسما لمجموعة الأعداد الحقيقية R إلى R ؟

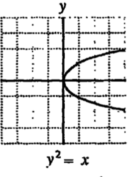
$$y = 2x + 1 \quad , \quad y^2 = x \quad , \quad y = x^2$$

الحـــــل

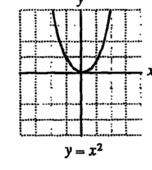
شكل ٦-٢ يبين التمثيل البيانى لهذه العلاقات:



$y = 2x + 1$



$y^2 = x$



$y = x^2$

شكل ٦-٢

واضح من الأشكال أن العلاقة $y = 2x + 1$ تمثل راسمـــا حيث أن لكل قيمـــة حقيقية x توجد قيمـــة واحدة y. كذلك العلاقة $y^2 = x$ لا تمثل راسما حيث أن لكل قيمة حقيقية x توجد قيمتان $y = \sqrt{x}$ ، $y = -\sqrt{x}$. أما العلاقة $y = x^2$ فتمثل راسما حيث أنه لكل قيمة حقيقية x توجد قيمة واحدة y تساوى x^2.

ملحوظة

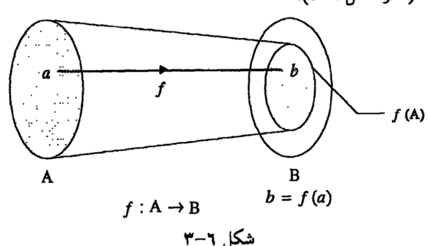
غالبا ما يطلق على الراسم لمجموعة الأعداد الحقيقية R (أو مجموعـــة جزئيـــة منها)

إلى R اسم دالة حقيقية *real function*.

٦–٢ مجال ومدى الراسم Domain and Range of a mapping

ليكن $f: A \to B$ راسما للمجموعة A إلى المجموعة B. يطلق على المجموعة A اسم المجال *Domain* ويطلق على المجموعة B اسم المجال المصاحب *codomain*. وتسمى مجموعة الصور بالنسبة لهذا الراسم المدى *range* ويرمز له بالرمز $f(A)$ (لاحـــظ أن $f(A) \subset B$ أى أن المدى مجموعة جزئية من المجال المصاحب).

ونستخدم أحيانا رسما للتعبير عن النطاق والنطاق المصاحب والمدى لراسم مـــا (أنظر شكل ٦–٣).

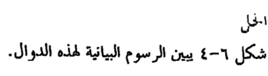


شكل ٦–٣

مثال

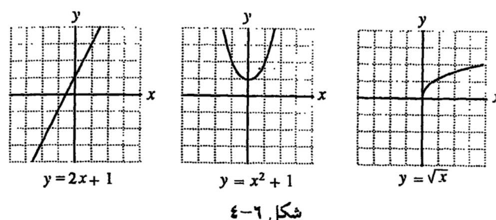
عين مجال ومدى الدوال الحقيقية الآتية:

$$f(x) = 2x + 1, \quad g(x) = x^2 + 1, \quad h(x) = \sqrt{x}$$



١.خلى

شكل ٦-٤ يبين الرسوم البيانية لهذه الدوال.



شكل ٦-٤

واضح من الشكل أن مجال الدالة $f(x) = 2x+1$ هو مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbf{R}$ ومداها هو مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbf{R}$ ، الدالة $g(x) = x^2 + 1$ مجالها هـــو مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbf{R}$ ومداها هو الفترة $[1,\infty)$. أما الدالة $h(x) = \sqrt{x}$ فمجالها هو مجموعة الأعداد الحقيقية الغير سالبة $[0,\infty)$ ومداها أيضـــا $[0,\infty)$ (لاحظ أن x لا يجب أن تكون سالبة. لماذا ؟).

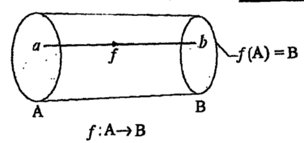
٦-٣ أنواع الرواسم Types of Mappings

لنفرض أن لدينا قاعة مجهزة بعدد من المقاعد وأن هناك عددا من الأشخـــاص داخل هذه القاعة. إذا جلس كل الأشخاص على مقاعد بحيث أن أى شخص لا يحتل أكثر من مقعد واحد (لاحظ إمكانية أن يشترك اثنان أو أكثر فى مقعد واحد) فإن عملية الجلوس هذه تُكَوِّن راسما f لمجموعـــة الأشخـــاص A إلى مجموعة المقاعد B ($f : A \to B$) ويحدد نوع الراسم فىهذا المثال تبعا لكيفية الجلوس نفسها: فإذا شُغِلت جميع المقاعد قيل أن الراسم فوقى *onto* أو غامر

surjective ، وإذا لم يشغل أى مقعد بأكثر من شخص واحد قيل أن الراسم أحادى *one-to-one* أو متباين *injective*. أما إذا كان عدد المقاعد مســاويا لعدد الأشخاص بالضبط فإنه يقال أن الراسم هو تطبيق *Injection* أو ... أحادى *one to one and onto*. وسنعطى فيما يلى تعريفا رياضيا لكل نوع من أنواع الرواسم:

٦-٣-١ الراسم الغامر (الفوقى) Onto (surjective) Mapping

يقال أن الراسم $f : A \rightarrow B$ اكان المدى يستغرق المجال المصاحب ... أى إذا كان $f(A) = B$ أنظر شكل ٦-٥).



شكل ٦-٥

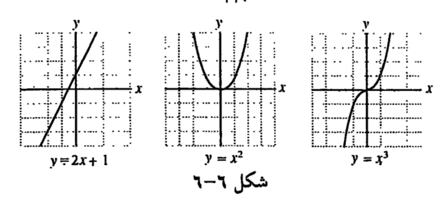
مثال

أى من الدوال الحقيقية الآتية تكون راسما غامرا؟

$y = 2x+1$, $y = x^2$, $y = x^3$

الحل

شكل ٦-٦ يبين الرسوم البيانية لتلك الدوال:



شكل ٦-٦

من الشكل يتضح أن:

مجال الدالة $y = 2x+1$ هو $\mathbf{R}$ ومداها هو $\mathbf{R}$ أيضا. إذن فالراسم هنا غامر.

مجال الدالة $y = x^2$ هو $\mathbf{R}$ ولكن مداها هو $[0,\infty)$. إذن فالراسم هنا غير غامر.

مجال الدالة $y = x^3$ هو ومداها هو $\mathbf{R}$ أيضا. إذن فالراسم هنا غامر.

ملحوظة:

يمكن أن نجعل الدالة $y = x^2$ راسما غامرا إذا حددنا المجال المصاحب ليكون المجموعة $[0,\infty)$ بدلا من $\mathbf{R}$ أى أن الدالة $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ حيث $f(x) = x^2$ راسم غير غامر فى حين أن الدالة $f : \mathbf{R} \to [0,\infty)$ حيث $f(x) = x^2$ راسم غامر.

وهذا يدعونا إلى التأكيد على أن الراسم $f : A \to B$ يتحدد بثلاثة مكونات: المجال A والمجال المصاحب B وقاعدة التعيين f وأى تغيير فى أحد تلك المكونات يُعَرِّف راسما آخر ولذا فى بعض الأحيان يكتب الراسم $f : A \to B$ بالصورة $(A , B ; f)$.

٦-٣-٢ الراسم الأحادى (الحاقن) One to one (Injective) Mapping

يكون الراسم $f : A \to B$ أحاديا إذا كان:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2 \quad \forall x_1, x_2 \in A$$

أى إذا تساوت صورتان فلابد أن يتساوى أصليهما. وهذا التعريف يكـــافىء منطقيا التعريف الآتى:

يكون الراسم $f: A \to B$ أحاديا إذا كان:

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in A$$

أى إذا اختلف أصلان فلابد أن تختلف صورتيهما.

مثال

أى من الدوال الحقيقية الآتية يكون راسما أحاديا:

$y = 2x+1 \quad , \quad y = x^2 \quad , \quad y = x^3$

الحل

فى الدالة $y = 2x+1$ إذا كانت $y_1 = 2x_1 + 1$ ، $y_2 = 2x_2 + 1$ فإن:

$$\begin{aligned} y_1 = y_2 &\Rightarrow 2x_1 + 1 = 2x_2 + 1 \\ &\Rightarrow 2x_1 = 2x_2 \\ &\Rightarrow x_1 = x_2 \end{aligned}$$

إذن فالدالة أحادية.

فى الدالة $y = x^2$ إذا كانت $y_1 = x_1^2$ ، $y_2 = x_2^2$ فإن:

$$\begin{aligned} y_1 = y_2 &\Rightarrow x_1^2 = x_2^2 \\ &\Rightarrow x_1^2 - x_2^2 = 0 \\ &\Rightarrow (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = 0 \\ &\Rightarrow x_1 - x_2 = 0 \text{ أو } x_1 + x_2 = 0 \\ &\Rightarrow x_1 = x_2 \text{ أو } x_1 = -x_2 \end{aligned}$$

فمثلا إذا كانت $y = 4$ فإن $x = 2$ أو $x = -2$ وعلى ذلك فإن الدالة $y = x^2$ ليست أحادية.

فى الدالة $y = x^3$ إذا كانت $y_1 = x_1^3$ ، $y_2 = x_2^3$ فإن:

$$y_1 = y_2 \Rightarrow x_1^3 = x_2^3$$
$$\Rightarrow x_1^3 - x_2^3 = 0$$
$$\Rightarrow (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2) = 0$$
$$\Rightarrow x_1 - x_2 = 0 \quad \text{أو} \quad x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2 = 0$$
$$\Rightarrow x_1 = x_2$$

أما الحل الآخر فمرفوض لأنه يعطى قيما تخيلية. أى أن كل قيمة حقيقية للمتغير y تناظرها قيمة حقيقية واحدة للمتغير x ؛ وعلى ذلك تكون الدالة أحادية (يمكن لنا التحقق من النتائج السابقة بالنظر إلى شكل ٦-٧).

٦-٣-٣التطبيق (التناظر الأحادى) One to one and onto (Bijective) Mapping

يكون الراسم $f : A \to B$ تناظرا أحاديا إذا كان:

(أ) f راسم غامر.

(ب) f راسم أحادى.

أى أن f يكون تناظرا أحاديا إذا كان:

$$x_1 = x_2 \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2) \;\; \forall\, x_1, x_2 \in A\,, f(x_1), f(x_2) \in B$$

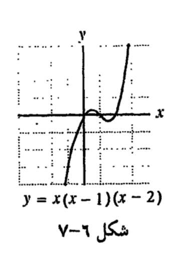
مثال ١

أى من الدوال الآتية يكون تناظرا أحاديا؟

$$f(x) = 2x + 1 \quad , \quad g(x) = x^2 \quad , \quad h(x) = x(x-1)(x-2)$$

الحـــــل

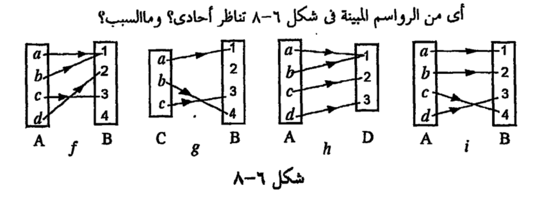
سبق أن أثبتنا أن الدالة $f(x) = 2x + 1$ أحادية وغامرة. إذن هى تناظر أحادى. وقد أثبتنـــا أيضا أن الدالة $g(x) = x^2$ ليســـت غـــامرة وليست أحادية. إذن فهى ليســـت تنـــاظر أحادى. أما الدالة $h(x) = x(x-1)(x-2)$ فهى غامرة ولكنها ليست أحاديـــة (أنظـــر شكل٦–٧).



شكل ٦–٧

مثال (٢)

أى من الرواسم المبينة فى شكل ٦–٨ تناظر أحادى؟ وماالسبب؟



شكل ٦–٨

الحـــــل

الراسم f ليس غامرا وليس أحاديا. إذن فهو ليس تناظرا أحاديا.

الراسم g أحادى ولكن ليس غامرا. إذن فهو ليس تناظرا أحاديا.

الراسم h غامر ولكن ليس أحاديا. إذن فهو ليس تناظرا أحاديا.

الراسم i غامر وأحادى. إذن هو تناظر أحادى.

ويعتبر التناظر الأحادى فى غاية الأهمية، اذ بواسطته يمكن عمل تنـــاظر بـــين المجموعات المختلفة فمثلا التناظر الحادث بين مجموعة النقط على الخط المستقيم ومجموعة الأعداد الحقيقية والتناظر الحادث بين مجموعـــة الأعـــداد الطبيعيـــة ومجموعة الأعداد الزوجية.. الخ.

٦-٤ عدد الرواسم للمجموعات المحدوده العناصر

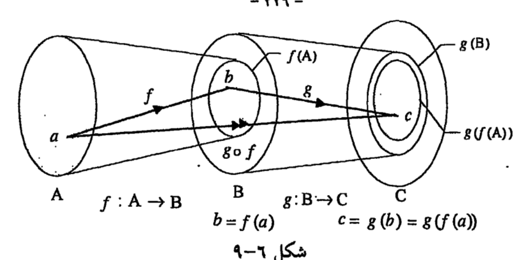
لنفرض عدد العناصر فى المجموعة A هو m وعدد العناصر فى المجموعة B هو n. سبق أن بينا أن عدد العلاقات التى يمكن إنشاؤها من A إلى B يســـاوى 2^{mn}، أما عدد الرواسم التى يمكن إنشاؤها من A إلى B فيمكن تصوره كالآتى: تخيل أن عناصر المجموعة A هى كرات a_1 ، a_2 ، ... ، a_m وأن عناصر المجموعة B هى حفر b_1 ، b_2 ، ... ، b_n . الكرة a_1 ستستقر فى احـــدى الحفر بطرق عددها n ، والكـــرة a_2 ستستقر فى احدى الحفر بطرق مستقلة عن طرق استقرار الكرة الأولى بطرق عددها n أيضا (لاحظ أنه لا يمنـــع استقرار الكرة الثانية فى نفس الحفرة التى استقرت فيها الكـــرة الأولى) ... وهكذا بالنسبة لبقية الكرات. إذن عدد الطرق التى يمكن أن تستقر بها جميـــع الكرات يساوى $n \times n \times ... \times n$ (m من المرات) أى n^m. إذن عدد رواســـم المجموعة A إلى B يساوى $\#A^{\#B}$ حيث #A يرمز لعدد عناصر المجموعة A ، #B يرمز لعدد عناصر المجموعة B. لنبحث الآن عدد الرواسم الأحادية للمجموعة A إلى المجموعة B:

الكرة الأولى ستستقر بطرق عددها n. وحيث أن الراسم أحادى وغير مسموح

أن تستقر أكثر من كرة فى حفرة واحدة. إذن فالكرة الثانية ستستقر بطـــرق عددها $n-1$ وبالمثل الكرة الثالثة ستستقر بطرق عددها $n-2$ ... وهكـــذا إلى الكرة الأخيرة التى ستستقر بطرق عددها $(n-m+1)$ ... $n(n-1)(n-2)$ أى ^nP_m (بشرط أن تكون $n \geq m$). إذن عدد الرواسم الأحادية للمجموعـــة A إلى المجموعة B يساوى $^{\#A}P_{\#B}$. أما إذا بحثنا عن عدد التناظرات الأحاديـــة للمجموعة A إلى المجموعة B فبادىء ذى بدء يجب أن يكون $m = n$ لمـــاذا ؟ الكرة الاولى ستستقر بطرق عددها n والكرة الثانيه ستستقر بطرق عددها $n-1$ والكرة الثالثة سنستقر بطرق عددها $n-2$ ... وهكذا إلى أن تبقـــى حفرة واحدة تستقر فيها الكرة الأخيرة. إذن عدد الطرق كلها يساوى.n $n!$ إذن عدد التناظرات الأحادية يساوى $\#(A)!$.

٦-٥ تحصيل الرواسم Composition of Mappings

ليكن f راسما للمجموعة A إلى المجموعة B $(f: A \to B)$ وليكن g راسمـــا للمجموعة B إلى المجموعة C $(g: B \to C)$. الراسم f يرسم العنصر $a \in A$ إلى العنصر $b \in B$ ، أى $b = f(a)$ والراسم g يرســـم العنصـــر $b \in B$ إلى العنصر $c \in C$ أى $c = g(b)$ (أنظر شكل ٦-٩).



شكل ٦-٩

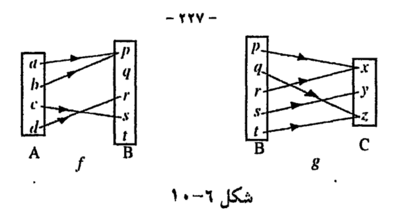
الراسم الذى يرسم a مباشرة إلى c هو تحصيـــل الراسمـــين f ، g (g بعـــد f) ويسمى الراسم المحصل *composite mapping* ويرمز له بالرمز $g \circ f$ ويعرف كالآتى:

$$(g \circ f)(a) = g(f(a)) \quad \forall\, a \in A\,,\ f(a) \in f(A)\,,\ g(f(a)) \in g(f(A))$$

والترتيب فى تحصيل الرواسم فى غاية الأهمية، اذ أن الراسم $f \circ g$ قد لا يكون مُعَرَّفا على الاطلاق وحتى إذا كان معرفا فإنه بوجه عام لا يتســـاوى مع $g \circ f$.

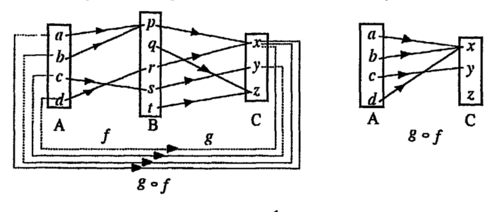
مثال (١)

لتكن $A = \{a , b , c , d\}$ ، $B=\{p , q , r , s , t\}$ ، $C =\{x , y , z \}$ ولتكن $f : A \to B$ ، $g : B \to C$ معرفتين بالمخططين السهميين المبينين بشكل ٦-١٠.



شكل ٦-١٠

فإن الراسم المحصل $g \circ f$ يمثله المخطط السهمى المبين بشكل ٦-١١:



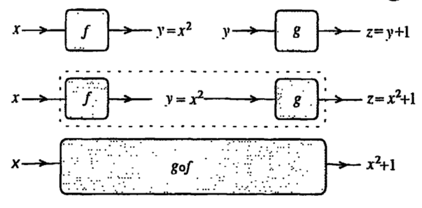
شكل ٦-١١

(لاحظ أن الراسم $f \circ g$ غير معرف) .

مثال (٢)

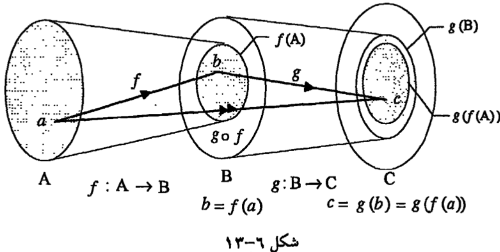
لتكن $f(x) = x^2$ ، $g(x) = x+1$ دالتان حقيقيتان. الدالة f يمكن تمثيلها بالمعادلة $y = x^2$ والدالة g يمكن تمثيلها بالمعادلة $z = g(y) = y + 1$. إذن الدالة المحصلة $g \circ f$ يمكن تمثيلها بالمعادلة $z = x^2 + 1$. ويمكن تصور هذا التحصيل كما يلى:

الصندوق f يحول المتغير x إلى x^2 والصندوق g يحـــول المتغـــير x إلى $x+1$. وحيث أننا نطبق الدالة g بعد f ، إذن فإن ذلك يكون بمثابة إدخال المتغير x فى الصندوق f أولا ليكون الناتج x^2 ثم ندخل الناتج x^2 فى الصندوق g فيكـــون الناتج $x^2 + 1$ (أنظر شكل ٦-١٢).



شكل ٦-١٢

لنبحث الآن الدالة المحصلة $g \circ f$ (f بعد g). يمكن تصور هذه الدالة المحصلة بأن ندخل المتغير x فى الصندوق g أولا ليكون الناتج $x + 1$ ثم ندخل الناتج $x + 1$ فى الصندوق f فيكون الناتج $(x+1)^2$ (أنظر شكل ٦-١٣).

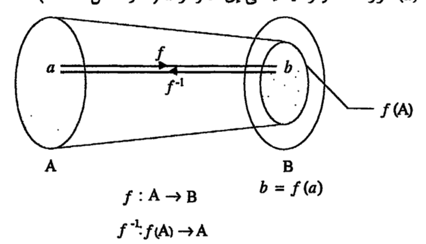


شكل ٦-١٣

واضح من هذا المثال أن الدالة المحصلة $f \circ g$ لا تساوى الدالة المحصلة $g \circ f$.

٦-٦ الرواسم العكسية Inverse mappings

ليكن f راسما احاديا للمجموعة A إلى المجموعة B. كل عنصر $a \in A$ يرسم إلى عنصر وحيد $b \in B$ حيث $b = f(a)$ وبما أن الراسم f أحادى، إذن $f(a)$صورة لعنصر وحيد ينتمى إلى A وهو a (أنظر شكل ٦-١٤).



$b = f(a)$

$f : A \to B$

$f^{-1}: f(A) \to A$

شكل ٦-١٤

أى أنه لكل عنصر b ينتمى إلى مدى الدالة $f : A \to B$ (أى إلى $f(A)$) فإنه يوجد عنصر وحيد a ينتمى إلى A بحيث $b = f(a)$ وهذا يُعَرِّف راسما يرسم

f (a) ثانية إلىa. هذا الراسم يسمى الراسم العكسى inverse mapping للراسم f ويرمز له بالرمز f^{-1} . أى أن:

$$a = f^{-1}(b) \Leftrightarrow b \in f(A)\,, a \in A\,, b = f(a)$$

وذلك بشرط أن يكون f أحاديا.

ومن الواضح أن:

$(f^{-1} \circ f)(a) = a \ \ \forall a \in A$ ، $(f \circ f^{-1})(b) = b \ \ \forall b \in f(A)$

ملحوظات

إذا كان الراسم $f: A \to B$ تناظرا أحاديا، أى إذا كان f أحادى وغامر فإن $f(A) = B$ ويُعَرَّف الراسم العكسى f^{-1} عندئذ كالآتى:

$$a = f^{-1}(b) \Leftrightarrow a \in A, b = B$$

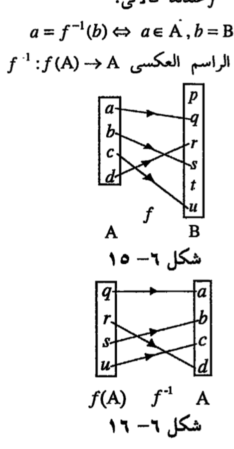
* إذا كان الراسم $f: A \to B$ أحاديا فإن الراسم العكسى $f^{-1}: f(A) \to A$ يكون تناظرا أحاديا.

مثال (١)

أوجد الراسم العكسى للراسم المبـــين بالمخطط السهمى بشكل ٦-١٥.

الحـــل

الراسم $f: A \to B$ أحادى ، مـــدى الراســـم هـــو $f(A) = \{q, r, s, u\}$.
الراسم العكسى $f^{-1}: f(A) \to A$ مبين بشكل ٦-١٦.
واضح أن هذا الراسم تناظر أحادى.

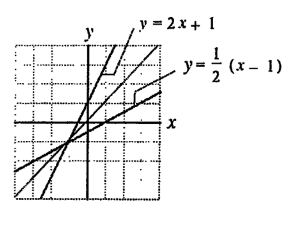


شكل ٦- ١٥
شكل ٦- ١٦

مثال (٢)

الدالة $f(x) = 2x + 1$ هى تناظر أحادى لـــ $\mathbf{R}$ إلى $\mathbf{R}$. وهذه الدالـــة لهـــا معكوس $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ يعطى كالآتى:

نضع $y = 2x + 1$ ونحصل على x بدلالة y فنجد أن $x = \frac{1}{2}(y-1)$ ثم نبـــدل x ، y فنحصــــل علـــى الدالـــة $y = \frac{1}{2}(x-1)$. وبذلـــك تكـــون الدالـــة $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(x-1)$ هى معكوس الدالة $f(x) = 2x + 1$ (أنظر شكل ٦-١٧ ولاحظ أن منحنى الدالتين $f(x)$ ، $f^{-1}(x)$ متماثلان حول المستقيم $y = x$).



شكل ٦-١٧

أمثلة متنوعة

مثال (١)

لتكن $X = R - \{3\}$ ، $Y = R - \{2\}$ ولتكن $f : X \to Y$ مُعَرَّفة كالآتى:

$$f(x) = \frac{2x+1}{x-3} \quad \forall\, x \in X$$

أثبت أن الراسم f تناظر أحادى وأوجد معكوسه.

الحـــــل

$$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow \frac{2x_1+1}{x_1-3}=\frac{2x_2+1}{x_2-3}$$
$$\Rightarrow (2x_1+1)(x_2-3)=(2x_2+1)(x_1-3)$$
$$\Rightarrow 2x_1x_2-6x_1+x_2-3=2x_1x_2-6x_2+x_1-3$$
$$\Rightarrow 7x_1=7x_2$$
$$\Rightarrow x_1=x_2$$

إذن f راسم أحادى (١)

$$y=\frac{2x+1}{x-3},\ x\in X \ \Rightarrow\ y(x-3)=2x+1$$
$$\Rightarrow\ xy-3y=2x+1$$
$$\Rightarrow\ x(y-2)=3y+1$$
$$\Rightarrow\ x=\frac{3y+1}{y-2},\ y\in Y$$

إذن كل $y\in Y$ يناظرها $x\in X$.

إذن f راسم غامر (٢)

من (١) ، (٢) نستنتج أن f تناظر أحادى يعطى راسمه العكسى $f^{-1}:Y\to X$ كالآتى:

$$y=f^{-1}(x)\ \Leftrightarrow\ x=f(y)$$
$$\Leftrightarrow\ x=\frac{2y+1}{y-3},\ y\neq 3$$
$$\Leftrightarrow\ y=\frac{3x+1}{x-2},\ x\neq 2$$

مثال (٢)

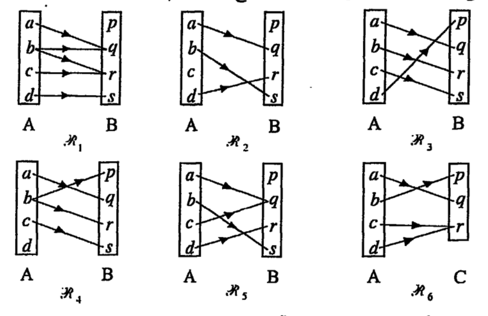
إذا كانت $f(x) = \sqrt{x}$ ، $g(x) = x^2 + 1$ أوجد كلا من $f \circ g$ ، $g \circ f$.

الحـــل

$$(g \circ f)(x) = x + 1 \quad , \quad (f \circ g)(x) = \sqrt{x^2 + 1}$$

تمارين (٣)

١. أى من العلاقات الآتية يكون راسما؟ حدد نوع هذا الراسم (أحادى - غامر - تناظر):



٢. ضع معادلة لكل راسم من الرواسم الآتية على R:

(أ) لكل عدد حقيقى عين مكعبه.

(ب) لكل عدد حقيقى عين العدد 5.

(ج) لكل عدد حقيقى موجب عين مربعه ولكل عدد حقيقى غير موجب عين العـــدد 6.

(د) لكل عدد حقيقى سالب عين العدد -1 ولكل عدد حقيقى غير سالب عين العدد 1.

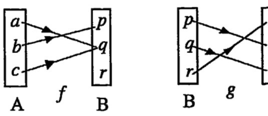
٣. ليكن $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{N}\cup\{0\}$ معرفا كالآتى:

$$f(p)=p^2 \quad \forall\, p\in\mathbb{Z}$$

عين نوع هذا الراسم وأوجد $f(\mathbb{Z})$. عين نوع الراسم المعين بنفس القاعدة والذى مجاله $\mathbf{N}$ وعين معكوسه (إذا وجد).

٤. الراسم الذى يعين لكل عدد من الأعداد $i\in\{1,2,\dots,n\}$ عددا غير مكرر a_i من نفس المجموعة يسمى تبديلة *permutation* للمجموعة $\{1,2,\dots,n\}$ ويكتب $\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n\end{pmatrix}$. إذا كانت $p=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&4&3\end{pmatrix}$ ، $q=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix}$ تبديلتين للمجموعة $\{1,2,3,4\}$ فأوجد p^{-1} ، q^{-1} ، $p\circ q$ ، $q\circ p$.

٥. لتكن $f:\mathrm{A}\to\mathrm{B}$ ، $g:\mathrm{B}\to\mathrm{C}$ معرفتين كالآتى:



أوجد $g\circ f$ ومدى كل من f ، g ، $g\circ f$.

٦. لتكن $\mathrm{A}=\mathrm{B}=\mathrm{R}-\{0,1\}$؛ ولتكن f ، g ، h ، i ، j ، k معرفة كالآتى:

$$f(x)=x\,,\ g(x)=1-x\,,\ h(x)=\frac{1}{x}\,,\ i(x)=\frac{1}{1-x}\,,\ j(x)=\frac{x}{x-1}\,,\ k(x)=\frac{x-1}{x}$$

أثبت أن محصلة أى اثنين من هذه الرواسم هو راسم من تلك الرواسم.

٧. أوجد معكوس كل من الرواسم الآتية:

(أ) $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}\,,\ f(x)=\dfrac{x+1}{2}$ (ب) $g:[0,\infty)\to[-1,\infty)\,,\ g(x)=x^2-1$

(ج) $h:[-1,\infty)\to[0,\infty)\,,\,h(x)=\sqrt{x+1}$ (د) $h:[-1,\infty)\to[0,\infty)\,,\,h(x)=\dfrac{2x-1}{3}$

٨. إذا كانت $p=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\3&4&1&2&6&5\end{pmatrix}$ ، $q=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\2&3&1&5&4&6\end{pmatrix}$ ، $r=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\6&3&2&5&4&1\end{pmatrix}$

فأوجد كلا من p^{-1} ، $r\circ p$ ، $(q\circ p)\circ r$ ، $p\circ(r\circ q^{-1})$ ، r^{-1} ،

$r\circ(q\circ p^{-1})$.

٩. أثبت أنه إذا وجد ثمانية أشخاص ، فإن اثنين منهم على الأقل لابد أن يكونوا قد ولدوا فى يوم واحد من الأسبوع.

١٠. أثبت أنه إذا اخترنا أحد عشر عددا من المجموعة $\{1,2,....,20\}$ فإن واحدا منهم على الأقل لابد أن يكون مضاعفا لآخر.

١١. أثبت أنه إذا كان لدينا n من الكرات نريد إدخالها فى m من الحفر ، $m<n$ ، فإن حفرة منها لابد أن تحتوى على $\frac{n-1}{m}+1$ من الكرات على الأقل.

١٢. أثبت أنه إذا وجد ثلاثون شخصا ، فإن خمسة منهم على الأقل لابد أن يكونوا قد ولدوا فى يوم واحد من الأسبوع.

الباب السابع

الزمرة وكود التعويض

GROUPS AND SUBSTITUTION CODES

٧-١ العمليات الثنائية Binary Operations

لتكن A مجموعة غير خالية. إذا عيَّنا لكل زوج مرتب (a, b) ينتمى للمربع الكرتيزى $A \times A = A^2$ عنصرا وحيدا c ينتمى للمجموعة A نفسها فإن هذا التعيين يعتبر راسما للمربع الكرتيزى A^2 إلى A ويسمى هذا الراسم عملية ثنائية *Binary Operation* على المجموعة A ؛ فمثلا عملية الجمع "+" على مجموعة الأعداد الطبيعية N يمكن تصورها كراسم بالطريقة الآتية:

$$(1,1) \overset{+}{\mapsto} 2 \ , \quad (1,2) \overset{+}{\mapsto} 3 \ , \quad (1,3) \overset{+}{\mapsto} 4 \ , \quad \cdots$$

$$(2,1) \overset{+}{\mapsto} 3 \ , \quad (2,2) \overset{+}{\mapsto} 4 \ , \quad (2,3) \overset{+}{\mapsto} 5 \ , \quad \cdots$$

$$(3,1) \overset{+}{\mapsto} 4 \ , \quad (3,2) \overset{+}{\mapsto} 5 \ , \quad (3,3) \overset{+}{\mapsto} 6 \ , \quad \cdots$$

....

أى أن $+ : N \times N \to N$. أى أن عملية الجمع "+" هى عملية ثنائية على N

(لاحظ أن عملية الطرح "-" ليست عملية ثنائية على N حيث أن:

$$(1,2) \overset{-}{\mapsto} -1 \notin N$$

وتمييزا للعمليات الثنائية عن الرواسم العادية سنرمز لها بأحد الرموز الآتية:

"+" , "·" , "×" , "*" , "⊕" , "⊗" , "#" , ...

وسنصطلح على أن نكتب مثلا $a \# b = c$ بدلا من أن نكتب $(a\,,b) \overset{\#}{\mapsto} c$ حيث العملية الثنائية هنا هى # . ويستحسن أحيانا أن نستخدم جدولا لتمثيل العملية الثنائية؛ فمثلا الجدولان الآتيان يمثلان عمليتى الجمع والضرب على مجموعة الأعداد الطبيعية:

+	1	2	3	4	...
1	2	3	4	5	...
2	3	4	5	6	...
3	4	5	6	7	...
4	5	6	7	8	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱

×	1	2	3	4	...
1	1	2	3	4	...
2	2	4	6	8	...
3	3	6	9	12	...
4	4	8	12	16	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱

ومن المفيد جدا استخدام الجداول خاصة إذا كانت العملية الثنائية على مجموعة عدد عناصرها محدود. ومن الجدول نستطيع أن نستنتج خصائص كثيرة للعملية.

مثال (١)

لتكن $A = \{p\,,q\,,r\}$ ولتكن $\circ : A \times A \to A$ معرّفة كالآتى:

$$p \circ p = q \;,\quad p \circ q = p \;,\quad p \circ r = p,$$
$$q \circ p = q \;,\quad q \circ q = r \;,\quad q \circ r = q,$$
$$r \circ p = r \;,\quad r \circ q = r \;,\quad r \circ r = p.$$

نستطيع تمثيل العملية بالجدول الآتى:

$\circ$	p	q	r
p	q	p	p
q	q	r	q
r	r	r	p

كل عنصر داخل الجدول ينتمى للمجموعة A. إذن العملية "∘" عملية ثنائية على A.

مثال (٢)

العملية "⊕" المعرفة بالقاعدة الآتية:

$$m \oplus n = 2m + 3n \ \forall \ (m , n) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N},$$

هى عملية ثنائية على N حيث أن $2m + 3n$ هو عدد طبيعى طالما كان كل من m ، n عددا طبيعيا. ويمكن تمثيل هذه العملية بالجدول الآتى:

⊕	1	2	3	4	...
1	5	8	11	14	...
2	7	10	13	16	...
3	9	12	15	18	...
4	11	14	17	20	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱

نستطيع من الجدول أن نستنتج مثلا أن $1 \oplus 2 \neq 2 \oplus 1$.

مثال (٣)

أدوات الربط ∧ ، ∨ ، → ، ↔ هى عمليات ثنائية على مجموعة قيم الحقيقة {1 , 0} وتُعرَّف بالجداول الآتية:

∧	0	1
0	0	0
1	0	1

،

∨	0	1
0	0	1
1	1	1

،

→	0	1
0	1	1
1	0	1

،

↔	0	1
0	1	0
1	0	1

أما عملية النفى "~" فليست عملية ثنائية على المجموعة {0,1} حيث أنها راسم للمجموعة إلى نفسها {0,1} → {0,1} : ~ وتسمى عملية أحادية *unary operation* على المجموعة {0,1} معرفة كالآتى:

$$0 \overset{\sim}{\mapsto} 1 \quad , \quad 1 \overset{\sim}{\mapsto} 0$$

أى:

$$\sim 0 = 1 \quad , \quad \sim 1 = 0$$

ملحوظة

كم عملية ثنائية يمكن تعريفها على المجموعة $A = \{0 , 1\}$؟ لإجابة هذا السؤال نحسب كم راسما لحاصل الضرب الكرتيزى:

$$A\times A = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$$

إلى A يمكن تعريفها. فنجد أن عدد تلك الرواسم يساوى $٢^{٤}$ أى 16. وبوجه عام إذا كان عدد عناصر المجموعة A يساوى n فإن عدد العمليات الثنائية التى يمكن تعريفها على A يساوى $(n^2)^n$ أى n^{2n}.

٧–٢ الأنظمة ذات العملية الواحدة Systems with one operation

لتكن A مجموعة غير خالية ولتكن o عملية ثنائية على A (أى $o: A\times A \to A$). المجموعة "A" والعملية الثنائية "o" تُكَوِّنان مايسمى بـ نظام ذو عمليه واحدة *system with one operation* وأحيانا يطلق عليه إسم زُمَيرة *groupoid* ويرمز له بالرمز $(A ; o)$ ؛ فمثلا $(\mathbf{N} ; +)$ نظام ذو عملية واحدة وهى عملية الجمع "+"، $(\mathbf{N} ; \times)$ نظام ذو عملية واحدة هى عملية الضرب "×"، $(\mathbf{Z} ; -)$ نظام ذو عملية واحدة وهى عملية الطرح "–" (لاحظ أن عملية الطرح عملية ثنائية على مجموعة الأعداد الصحيحة $\mathbf{Z}$). أما إذا عرفنا أكثر من عملية ثنائية على مجموعة ما فإننا نكون عندئذ نظاما ذا عمليتين أو أكثر.

خاصية الإبدال Commutative property

ليكن $(A ; o)$ نظاما ذا عملية واحدة. يقال أن العملية الثنائية o إبدالية على A

إذا كان:

$$a \circ b = b \circ a \quad \forall\, a, b \in A$$

فمثلا عملية الجمع "+" إبدالية على N وعملية الضرب "x" إبدالية أيضا على N أما العملية الثنائية "⊕ " المُعرَّفة على N بالقاعدة:

$$m \oplus n = 2m + 3n \qquad \forall\, m, n \in N$$

فليست إبدالية، إذ أن:

$$n \oplus m = 2n + 3m \neq m \oplus n$$

ونستطيع إدراك ذلك بالنظر فى الجدول الآتى الذى يمثل العملية:

⊕	1	2	3	4	...
1	5	8	11	14	...
2	7	10	13	16	...
3	9	12	15	18	...
4	11	14	17	20	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱

فنجد أن $1 \oplus 2 = 8$ فى حين أن $2 \oplus 1 = 7$ ونلاحظ أن الجـــدول غـــير متماثل حول القطر الرئيسى. وبوجه عام إذا كان النظام (A ; o) ممثلا بجدول فنستطيع أن نتبين من الجدول أن العملية "o" إبدالية أو غير إبدالية إذا كـــان الجدول متماثل حول قطره الرئيسى (أى أن العناصر متساوية البعد عن القطــر الرئيسى متساوية) أو غير متماثل؛ فمثلا فى النظامين الآتيين:

*	p	q	r
p	p	r	q
q	q	p	r
r	r	q	p

o	p	q	r
p	p	q	r
q	q	r	p
r	r	p	q

فإن العملية "o" إبدالية أما العملية "*" فليست إبدالية.

٧-٤ خاصية الدمج Associative Property

ليكن (A ; o) نظاما ذا عملية واحدة. يقال أن العملية "o" دامجة على A إذا كان:

$$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c) \quad \forall\ a, b, c \in A$$

فمثلا كل من عمليتي الجمع والضرب دامجة على **N** ؛ إذ أن:

$$(m + n) + p = m + (n + p) \qquad \forall\ m, n, p \in \mathbf{N}$$

$$(m \times n) \times p = m \times (n \times p) \qquad \forall\ m, n, p \in \mathbf{N}$$

أما العملية ⊕ المعرفة على **N** بالقاعدة:

$$m \oplus n = 2m + 3n \qquad \forall\ m, n \in \mathbf{N}$$

فليست دامجة على **N** ؛ إذ أن:

$$(m \oplus n) \oplus p = (2m + 3n) \oplus p = 2(2m+3n) + 3p$$
$$= 4m + 6n + 3p$$

فى حين أن:

$$m \oplus (n \oplus p) = m \oplus (2n + 3p) = 2m + 3(2n + 3p)$$
$$= 2m + 6n + 9p$$

تمرين

أثبت أن عملية الطرح "−" ليست دامجة وليست إبدالية على **Z**.

ملحوظة

إذا كانت العملية الثنائية معرفة على مجموعة محدودة، فلكى نثبت أنها دامجة يجب أن نأخذ كل العمليات الممكنة ؛ فمثلا لكى نثبت أن العملية الثنائية o فى النظام ({p , q} ; o) المعرف بالجدول

o	p	q
p	p	q
q	q	p

دامجة فإننا

نحسب كلا من:

$(p\circ p)\circ p$ ، $p\circ(p\circ p)$ ، $(p\circ p)\circ q$ ، $p\circ(p\circ q)$ ،

$(p\circ q)\circ p$ ، $p\circ(q\circ p)$ ، $(q\circ p)\circ p$ ، $q\circ(p\circ p)$ ،

$(q\circ q)\circ p$ ، $q\circ(q\circ p)$ ، $(p\circ q)\circ q$ ، $p\circ(q\circ q)$ ،

$(q\circ p)\circ q$ ، $q\circ(p\circ q)$ ، $(q\circ q)\circ q$ ، $q\circ(q\circ q)$

فنجد أن:

$p\circ(p\circ p)=(p\circ p)\circ p$ ، $p\circ(p\circ q)=(p\circ p)\circ q$ ، ...

وهذا يثبت أن العملية o دامجة.

أما إذا كانت العملية الثنائية معرفة بقاعدة فإننا نثبت كلا من خاصيتى الدمج والإبدال بواسطة القاعدة.

٧-٥ الزمرة The Group

ليكن $(A\,;\circ)$ نظاما ذا عملية واحدة. يطلق على هذا النظام إسم زمرة *group* إذا كان يحقق الشروط الآتية مجتمعة:

(١) العملية " o" دامجة على A. أى:

$$(a\circ b)\circ c=a\circ(b\circ c) \qquad \forall\ a,b,c\in A$$

(٢) يوجد **محايد أيسر** *left identity* $e\in A$ يحقق:

$$e\circ a=a \quad \forall\ a\in A$$

(٣) لكل $a\in A$ يوجد معكوس أيسر *left opposite* $a'\in A$ يحقق:

$$a'\circ a=e$$

هذا، والنظام الذى يحقق الشرط الأول على الأقل يسمى شبه زمرة

semi-group. أما النظام الذى يحقق الشرطين الأول والثـــانى علـــى الأقـــل فيسمى *monoid*

وإذا كان النظام - بالاضافة للشروط الثلاثة السابقة - يحقق الشرط الإضافى:

(٤) العملية o إبدالية على A،

فإنه يسمى زمرة إبدالية *commitative group* .

مثال (١)

النظام (+ ; Z) يحقق الشروط:

$$(m+n)+p=m+(n+p) \quad \forall\ m,n,p \in \mathbf{Z} \qquad (1)$$

$$0+m=m+0=m \quad \forall\ m \in \mathbf{Z} \qquad (2)$$

$$\forall\ m \in \mathrm{Z}\ \ \exists(-m) \in \mathbf{Z}\ \text{بحيث}\ \ m+(-m)=0 \qquad (3)$$

$$m+n=n+m \quad \forall\ m,n \in \mathbf{Z} \qquad (4)$$

أى أن النظام (+ ; Z) هو زمرة إبدالية عنصرها المحايد هو الصفر ومعكوس أى عنصر هو سالبه.

مثال (٢)

النظام (- ; Z) ليس زمرة حيث أن عملية الطرح "-" ليست دامجة علـــى Z. أى:

$$(m-n)-p \neq m-(n-p) \quad \forall\ m,n,p \in \mathbf{Z}$$

مثال (٣)

النظام (+ ; N) ليس زمرة حيث أن N لا تحتوى على عنصر محايد. ولكـــن النظام يحقق شرطى الدمج (١) والإبدال (٤). إذن فهو شبه زمرة إبدالية.

مثال (٤)

النظام (× ; N) ليس زمرة حيث أن أى عنصر خلاف الواحد الصحيح ليس له

معكوس (مقلوب). ولكن النظام يحقق شرطي الدمج (١) والإبدال (٤) بالإضافة إلى شرط وجود العنصر المحايد (٢). إذن فهو شبه زمرة إبدالية.

مثال (٥)

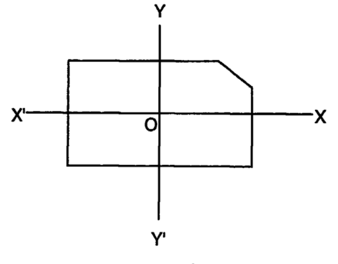
النظام الممثل بالجدول

o	p	q
p	p	q
q	q	p

زمرة إبدالية عنصرها المحايد هو p ومعكوس أى عنصر فيها هو العنصر نفسه.

مثال (٦)

خذ قطعه مستطيلة من الورق واقطع ركنا من أركانها وارسم فيها المحورين المتعامدين X' OX، Y'OYاللذين يتقاطعان فى O (أنظر شكل ٧-١).



شكل ٧-١

لتكن I ، H ، V ، R هى التحويلات الآتية:

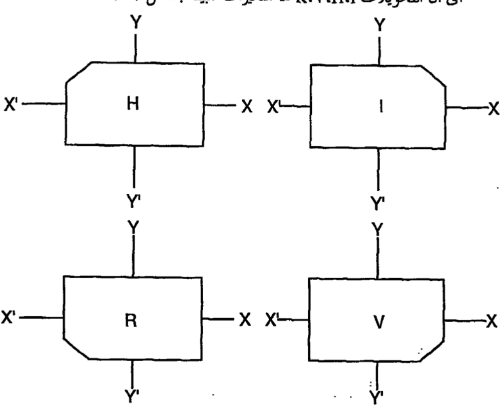
I : أترك الشكل كما هو.

H : أدر الشكل 180^o حول المحور X'OX.

V : أدر الشكل 180^o حول المحور Y'OY.

R : أدر الشكل 180^o حول النقطة O.

أى أن التحويلات I،H،V،R لها التأثيرات المبينة بشكل ٧-٢.



شكل ٧-٢

ويصبح لدينـــــا مجموعة $T = \{I, H, V, R\}$ هى مجموعة التحويلات المعرفة سابقا.

سنُعرِّف الآن عملية ثنائية ⊗ على T كالآتى:

$V \otimes H$ معناها أجر التحويلة H ثم اتبعها بالتحويلة V فنجد أن المحصلة هى

التحويلة R أى أن:

$$H \otimes V = R$$

وكذلك فإن:

$$H \otimes R = V \,,\; V \otimes R = H \,,\ldots$$

نستطيع إذن أن نكوّن الجدول الآتى:

⊗	I	H	V	R
I	I	H	V	R
H	H	I	R	V
V	V	R	I	H
R	R	V	H	I

يتضح من هذا الجدول أن النظام (⊗ ; T) هو زمرة إبدالية عنصرها المحايد هو I ومعكوس أى عنصر هو العنصر نفسه.

مثال (٧)

النظام المبين بالجدول الآتى يمثل زمرة إبدالية عنصرها المحايد هو p .

∘	p	q	r
p	p	q	r
q	q	r	p
r	r	p	q

ولكى نعين معكوس عنصر ما وليكن العنصر q فإننا ننظر فى الجدول أفقيا أمام q حتى نجد العنصر المحايد p فنرى أنها تقع تحت r ، فيكون معكوس q هو r. وبالمثل معكوس r هو q.

٧-٦ خواص الزُمر Properties of Groups

استخدمنا عند تعريف الزمرة أقل قدر من الشروط حتى لا يكون هناك أى تكرار. وقد يستخدم بعض المؤلفين شروطا زائدة عن الحاجة وهذا يؤدى إلى

تكرار غير مطلوب. وسنثبت فيما يلى بعض خواص الزمر مستخدمين الشروط الأساسية فقط ومفترضين أن الزمرة قيد الدراسة هى $(A\,;\,o)$:

٧-٦-١ المعكوس الأيسر لعنصر هو أيضا معكوس أيمن له

لنفرض أن a' هو المعكوس الأيسر للعنصر a فى الزمرة $(A\,;\,o)$. أى لنفرض أن $a \circ a' = e$. بتطبيق الشرط (٢) وهو وجود محايد أيسر نجد أن:

$$a \circ a' = e \circ (a \circ a')$$

لنفرض أن العنصر b هو المعكوس الأيسر للعنصر a'. أى لنفرض أن:

$$b = e \circ a'$$

إذن:

$$\begin{aligned} a \circ a' &= (b \circ a') \circ (a \circ a') \\ &= b \circ (a' \circ (a \circ a')) && \text{[شرط الدمج (١)]} \\ &= b \circ ((a' \circ a) \circ a') && \text{[شرط الدمج (١)]} \\ &= b \circ (e \circ a') && \text{[شرط المعكوس الأيسر (٣)]} \\ &= b \circ a' && \text{[شرط المحايد الأيسر (٢)]} \\ &= e \end{aligned}$$

$$\therefore \quad a' \circ a = e = a \circ a'$$

٧-٦-٢ المحايد الأيسر للزمرة هو أيضا محايد أيمن لها

$$a \circ e = a \circ (a' \circ a) = (a \circ a') \circ a = e \circ a = e$$

$$\therefore \quad a \circ e = a = e \circ a$$

وبفضل تلك الخاصية فإننا نذكر فقط العنصر المحايد بدلا من أن نذكر المحـــايد الأيسر أو المحايد الأيمن.

٧-٦-٣ الحذف الأيسر والحذف الأيمن

سنثبت الآن خاصية الحذف الأيسر:

$$(a \circ b = a \circ c) \Rightarrow (b = c) \qquad \forall\ a, b, c \in A$$

البرهان

ليكن a' هو معكوس a . إذن:

$$(a \circ b = a \circ c) \Rightarrow [a' \circ (a \circ b) = a' \circ (a \circ c)]$$

$$\Rightarrow [(a' \circ a) \circ b = (a' \circ a) \circ c] \qquad \text{(شرط الدمج)}$$

$$\Rightarrow (e \circ b = e \circ c) \qquad \text{(شرط المعكوس)}$$

$$\Rightarrow (b = c)$$

وبالمثل يمكن أن نثبت خاصية الحذف الأيمن:

$$(b \circ a = c \circ a) \Rightarrow (b = c) \qquad \forall\ a, b, c \in A$$

٧-٦-٤ وجود ووحدانية حل المعادلات

سنثبت الآن أن المعادلة:

$$a \circ x = b$$

لها حل دائما، وأن هذا الحل وحيد (أى أن المعادلة تتحقـــق بقيمـــة وحيـــدة للمجهول x).

البرهان

بالضرب من اليسار فى a' (معكوس a) نجد أن:

$$a' \circ (a \circ x) = a' \circ b$$

$\therefore \quad (a' \circ a) \circ x = a' \circ b$

$\therefore \quad e \circ x = a' \circ b$

$\therefore \quad x = a' \circ b$

وبذلك نكون قد أثبتنا وجود الحل. سنثبت الآن وحدانية ذلك الحل:

لنفرض المعادلة تتحقق بقيمتين k ، k^* . إذن:

$a \circ k = b \;\; , \;\; a \circ k^* = b$

$\therefore \quad a \circ k = a \circ k^*$

وبتطبيق خاصية الحذف الأيسر:

$\therefore \quad k = k^*$

وبالمثل يمكن أن نثبت أن المعادلة:

$x \circ a = b$

لها حل وحيد وهو:

$x = b \circ a'$

٧-٦-٥ العنصر المحايد للزمرة هو عنصر وحيد

البرهان

المعادلة $a = a \circ x$ لها حل وحيد $x = e$ ، حيث e هو العنصر المحايد .

٧-٦-٦ معكوس أى عنصر فى الزمرة هو عنصر وحيد

البرهان

المعادلة $a = e \circ x$ لها حل وحيد $x = a'$ ، حيث a' هو معكوس a .

مثال

لتكن $X = \mathbf{R} - \{-1\}$ ولتكن العملية "*" معرفة كالآتى:

$x * y = x + y + xy$

أثبت أن النظام (X ; *) زمرة إبدالية وحل المعادلة:

$$x * 4 = -3$$

فى هذا النظام.

الحـــل

(١) العملية "*" إبدالية على X حيث أن:

$$y * x = y + x + yx = x + y + xy = x * y$$

(٢) العملية "*" دامجة على X حيث أن:

$$\begin{aligned}(x * y) * z &= (x + y + xy) * z \\ &= x + y + xy + z + (x + y + xy)z \\ &= x + y + z + xy + yz + xz + xyz, \\ x * (y * z) &= x * (y + z + yz) \\ &= x + y + z + yz + x(y + z + yz) \\ &= x + y + z + xy + yz + xz + xyz \\ &= (x * y) * z\end{aligned}$$

(٣) العنصر المحايد هو العنصر $e \in X$ المحدد بالمعادلة :

$$e * a = a \qquad \forall a \in X$$

$$\therefore \quad e + a + ea = a \qquad \forall a \in X$$

$$\therefore \quad e + ea = 0 \qquad \forall a \in X$$

$$\therefore \quad e(1 + a) = 0 \qquad \forall a \in X$$

وحيث أن $a \neq -1$ ، إذن $e = 0$. أى أن العنصر المحايد هو الصفر.

(٤) معكوس أى عنصر $a \in X$ هو العنصر a^{-1} المحدد بالمعادلة:

$$a^{-1} * a = 0$$

$$\therefore \quad a^{-1} + a + a^{-1}a = 0$$

$$\therefore \quad a^{-1}(1 + a) = -a$$

$$\therefore \quad a^{-1} = -\frac{a}{1 + a}$$

إذن النظام $(X\,;*)$ زمرة إبدالية محايدها هو 0 ومعكوس أى عنصر a هو العنصر $-a/(1+a)$.

وحل المعادلة: $x * 4 = -3$

نضرب (مستخدمين العملية "*") كلا من الطرفين من اليمين فى معكوس 4 وهو $-\frac{4}{5}$ فنجد أن:

$$(x*4)* -\tfrac{4}{5} = -3 * -\tfrac{4}{5}$$

$$\therefore \quad x*(4* -\tfrac{4}{5}) = -3 -\tfrac{4}{5} + (-3)(-\tfrac{4}{5})$$

$$\therefore \quad x*0 = -\tfrac{19}{5} + \tfrac{12}{5}$$

$$\therefore \quad x+0+0\cdot x = -\tfrac{7}{5}$$

$$\therefore \quad x = -\tfrac{7}{5}$$

٧-٧ الزمر الدائرة Cyclic Groups

لتكن $(A\,;\circ)$ زمرة. إذا وجد عنصر (أو اكثر) $a \in A$ بحيث يمكن التعبير عن أى عنصر آخر $b \in A$ بالصورة:

$$b = a \circ a \circ \ldots \circ a = a^n$$

فإن العنصر a يسمى مولدا *generator* للزمرة وتسمى n قوة *power* العنصر b بالنسبة للمولد a، وعندئذ نسمى الزمرة $(A\,;\circ)$ زمرة دائرة *cyclic group* ذات مولد a.

مثال (١)

الزمرة الممثلة بالجدول:

$\circ$	p	q	r
p	p	q	r
q	q	r	p
r	r	p	q

زمرة دائرة لها مولدان هما q ، r وذلك حيث أن:

$$q^1 = q \;,\; q^2 = q \circ q = r \;,\; q^3 = q \circ q \circ q = p$$
$$r^1 = r \;,\; r^2 = r \circ r = q \;,\; r^3 = r \circ r \circ r = p$$

أى أن قوتى العنصرين p ، r بالنسبة للمولد q هما 3 ، 2 على الترتيب ؛ وقوتى العنصرين p ، q بالنسبة للمولد r هما 3 ، ٢ على الترتيب.

مثال (٢)

الزمرة الممثلة بالجــدول:

×	1	−1	i	−i
1	1	−1	i	−i
−1	−1	1	−i	i
i	i	−i	−1	1
−i	−i	i	1	−1

حيث $i = \sqrt{-1}$ ، زمرة دائرة مولداها هما i ، i− وذلك لأن:

$$i^1 = i \;,\quad i^2 = -1 \;,\quad i^3 = -i \;,\quad i^4 = 1,$$
$$(-i)^1 = -i \;,\; (-i)^2 = -1 \;,\; (-i)^3 = i \;,\; (-i)^4 = 1$$

وقوى العناصر بالنسبة لهذين المولدين تعطى بالجدول الآتى:

العنصر	1	−1	i	−i
قوة العنصر بالنسبة للمولد i	4	2	1	3
قوة العنصر بالنسبة للمولد(i−)	4	2	3	1

مثال (٣)

الزمرة الممثلة بالجــدول:

⊗	I	H	V	R
I	I	H	V	R
H	H	I	R	V
V	V	R	I	H
R	R	V	H	I

ليست دائرة إذ أن أى عنصر فيها لا يولد الزمرة. فمثلا:

$$H \otimes H = I \ , \ V \otimes V = I \ , \ R \otimes R = I ,$$

$$H \otimes H \otimes H = H \ , \ V \otimes V \otimes V = V \ , \ R \otimes R \otimes R = R$$

أى أن أى عنصر لا يولد إلا نفسه أو العنصر المحايد I .

٧-٨ الزمر الجزئية Subgroups

فى مثال (٢) السابق لو اقتصرنا فى الجدول على الخانتين الأولى والثانية فإننا نحصل على الجدول المصغر:

×	1	−1
1	1	−1
−1	−1	1

وهو يمثل زمرة أيضا هى $(\times ; \{1 , -1\})$. وحيث أن المجموعة $\{1 , -1\}$ هى مجموعة جزئية من $\{1 , -1 , i, -i\}$ لذا نقول أن النظام $(\times ; \{1,-1\})$ هو زمرة جزئية subgroup من النظام $(\times ; \{1 , -1 , i, -i\})$ أو أن $\{1 , -1\}$ هى زمرة جزئية من $\{1 , -1 , i, -i\}$ بالنسبة للعملية × .

وفى مثال (٣) السابق لو اقتصرنا فى الجدول على الخانتين الأولى والثانية فإننا نحصل على الجدول المصغر:

⊗	I	H
I	I	H
H	H	I

وهو يمثل زمرة أيضا هى $(\otimes ; \{I , H\})$.

وحيث أن المجموعة $\{I , H\}$ هى مجموعة جزئية من $\{I , H , V, R\}$ لذا نقول أن النظام $(\otimes ; \{I , H\})$ هو **زمرة جزئية** subgroup من النظام (الزمرة)

$(\{I, H, V, R\} ; \otimes)$ أو أن $\{I, H\}$ هى زمرة جزئية من $\{I, H, V, R\}$ بالنسبة للعملية $\otimes$. وإذا دققنا النظر سنجد أن $\{I, V\}$، $\{I, R\}$ هما أيضا زمرتان جزئيتان من الزمرة الأصلية $\{I, H, V, R\}$ بالنسبة للعملية $\otimes$.

مثال (١)

لتكن $X = \{1,2,4,5,7,8\}$ ولتكن العملية $\otimes_9$ هى الضرب بمقياس٩ (أى ضرب العددين فى بعضهما وطرح مضاعفات 9). بيّن أن:

(أ) $(X ; \otimes_9)$ زمرة إبدالية دائرة وأوجد مولديها وقوى العناصر بالنسبة لكل مولد.

وإذا كانت $Y = \{1,4,7\}$ ، $Z = \{1,8\}$ فاثبت أن:

(ب) كلا من $(Y ; \otimes_9)$ ، $(Z ; \otimes_9)$ زمرة دائرة جزئية من $(X ; \otimes_9)$ وأوجد مولداها وقوى العناصر بالنسبة لكل مولد.

الحـــل

(أ) نكوّن الجدول:

$\otimes_9$	1	2	4	5	7	8
1	1	2	4	5	7	8
2	2	4	8	1	5	7
4	4	8	7	2	1	5
5	5	1	2	7	8	4
7	7	5	1	8	4	2
8	8	7	5	4	2	1

من الجدول نستنتج أن:

- العملية $\otimes_9$ عملية ثنائيه على X .
- العملية $\otimes_9$ دامجة (يمكن إثبات أن عملية الضرب بمقياس دامجة بوجه عام).
- العنصر المحايد هو العنصر 1.

• كل عنصر له معكوس حسب الجدول الآتى:

العنصر	1	2	4	5	7	8
المعكوس	1	5	7	2	4	8

وفضلا عن ذلك فإن:

• العملية $\otimes_9$ إبدالية (الجدول متماثل حول القطر الرئيسى).

إذن فالنظام $(X ; \otimes_9)$ زمرة إبدالية. وبحساب قوى العناصر نجد أن العنصرين٢ ، 5 هما المولدان الوحيدان للزمرة. إذن الزمرة $(X ; \otimes_9)$ دائرة مولداهـــا همــا العنصران٢ ، 5 وقوى عناصرها بالنسبة لهذين المولدين تحسب كالآتى:

$2^1 = 2$ ، $2^2 = 2 \otimes_9 2 = 4$ ، $2^3 = 4 \otimes_9 2 = 8$ ،
$2^4 = 8 \otimes_9 2 = 7$ ، $2^5 = 7 \otimes_9 2 = 5$ ، $2^6 = 5 \otimes_9 2 = 1$ ،

$5^1 = 5$ ، $5^2 = 5 \otimes_9 5 = 7$ ، $5^3 = 7 \otimes_9 5 = 8$ ،
$5^4 = 8 \otimes_9 5 = 4$ ، $5^5 = 4 \otimes_9 5 = 2$ ، $5^6 = 2 \otimes_9 5 = 1$

أى أن قوى العناصر بالنسبة للمولدين٢ ، 5 تعطى بالجدول الآتى:

العنصر	1	2	4	5	7	8
قوة العنصر بالنسبة2 للمولد	6	1	2	5	4	3
قوة العنصر بالنسبة5 للمولد	6	5	4	1	2	3

(ب) الجدول المصغر:

$\otimes_9$	1	4	7
1	1	4	7
4	4	7	1
7	7	1	4

يمثل زمرة إبدالية عنصرها المحايد هو 1 ومعكوسات العناصر هي حسب الجدول الآتي:

العنصر	1	4	7
المعكوس	1	7	4

لذا فإن $(Y ; \otimes_9)$ زمرة جزئية من $(X ; \otimes_9)$. وهي أيضا زمرة دائرة مولداها هما 4، ٧ وقوى العناصر بالنسبه لهذين المولدين هي:

العنصر	1	4	7
قوة العنصر بالنسبة 4 للمولد	3	1	2
قوة العنصر بالنسبة 7 للمولد	3	2	1

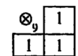
أيضا، الجدول المصغر:

$\otimes_9$	1	8
1	1	8
8	8	1

يمثل زمرة دائرة مولدها هو العنصر 8. لذا فإن $(Z ; \otimes_9)$ زمرة جزئية من الزمرة $(X ; \otimes_9)$.

ملحوظة

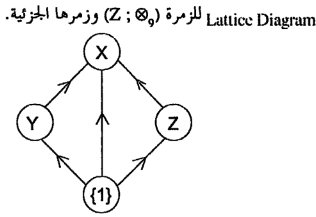
لا يفوتنا هنا أن نذكر أن النظام ({1} ; $\otimes_9$) الممثل بالجدول:



$\otimes_9$	1
1	1

زمرة جزئية من الزمرة (Z ; $\otimes_9$) وبالتالى من الزمرة الأصلية (X ; $\otimes_9$).

ويمثل شكل ٧-٣ العلاقة "زمرة جزئية من" ويسمى **الشكـــــل العنقـــودى** Lattice Diagram للزمرة (Z ; $\otimes_9$) وزمرها الجزئية.



شكل ٧-٣

مثال (٢)

ليكن ABC مثلثا متساوى الأضلاع، ولتكن M ملتقى المستقيمات المتوسطة، ولتكن I ، J ، K هى الدورانات الآتية:

I : أترك المثلث كما هو.

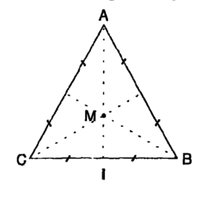
J : أدر المثلث ضد عقارب الساعة حول M زاوية مقدارها 120°.

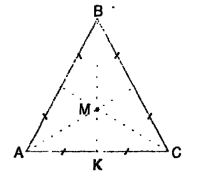
K : أدر المثلث ضد عقارب الساعه حول M زاوية مقدارها 240°.

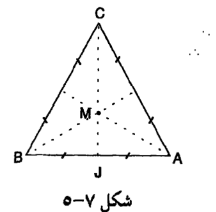
أثبت أن النظام ($\otimes$; T) حيث $T = \{I , J , K\}$ ، $\otimes$ ترمز لعمليــة تحصيــل الدورانات هو زمرة دائرة. ماهو مولد تلك الزمرة؟

الحـــــل

شكل ٧-٥ يمثل الدورانات I ، J ، K :







شكل ٧-٥

واضح من الرسم أن:

$$I\otimes I = I \quad , \quad I\otimes J = J \quad , \quad I\otimes K = K,$$
$$J\otimes I = J \quad , \quad J\otimes J = K \quad , \quad J\otimes K = I,$$
$$K\otimes K = I \quad , \quad K\otimes J = I \quad , \quad K\otimes K = J$$

نكوّن الجدول:

⊗	I	J	K
I	I	J	K
J	J	K	I
K	K	I	J

فنجد أنة يمثل زمرة دائرة عنصرها المحايد هو I ومولداها هما J ،K وقوى العناصر بالنسبة لهذين المولدين تعطى بالجدول الآتى:

العنصر	I	J	K
قوة العنصر بالنسبة J للمولد	3	1	2
قوة العنصر بالنسبة K للمولد	3	2	1

٧–٩ الزُمَر المتشاكلة Isomorphic Groups

إذا دققنا النظر فى النظامين الممثلين بالجدولين:

o	p	q
p	p	q
q	q	p

,

×	1	−1
1	1	−1
−1	−1	1

نجد أنهما متشابهين تماما فى كل شئ عدا أسماء العناصر. وإذا عرفنا الراسم $f:\{p,q\}\rightarrow\{1,-1\}$ كالآتى:

$$f(p)=1 \quad , \quad f(q)=-1$$

نجد أن هذا الراسم تناظر أحادى. وعلاوة على ذلك فإن:

$$f(p \circ p)=1=1\times 1 \quad , \quad f(p \circ q)=-1=1\times -1 ,$$
$$f(q \circ p)=-1=-1\times 1 \quad , \quad f(q \circ q)=1=-1\times -1$$

أى أن الراسم $f : \{p , q\} \to \{1 , -1\}$ ؛ فضلا عن أنه تناظر أحادى، فإنـــه يحفظ العمليتين × ، o. لذا فإنه يسمى تشاكلا isomorphism ونســـتطيع عندئذ أن نقول أن النظامين:

o	p	q
p	p	q
q	q	p

×	1	−1
1	1	−1
−1	−1	1

متشاكلان isomorphic . وحيث أن كلا من النظامين زمرة فإننا نقـــول أن هاتين الزمرتين متشاكلتان. وبوجه عام فإن النظامين $(A ; \times)$ ، $(B ; \otimes)$ يكونان متشاكلين إذا، وفقط إذا، وُجد راسم أحادى $f : A \to B$ يحفـــظ العمليتـــين. والتشاكل فى غاية الأهمية؛ إذ عن طريقه يمكن دراسة خواص نظام ما $(A ; \times)$ عن طريق دراسة نظام آخر $(B ; \otimes)$ إذا علم أنهما متشاكلان. فمثلا أثبتنـــا أن النظام:

$\otimes_9$	1	4	7
1	1	4	7
4	4	7	1
7	7	1	4

زمرة إبدالية عنصرها المحايد هو 1 والعنصران 4 ، 7 كل منهما معكوس الآخر. وفضلا عن ذلك فهذه الزمرة دائرة مولداها هما 4 ، 7 . إذا عرفنـــا الراســـم $f : \{1 , 4 , 7\} \to \{p , q , r\}$ كالآتى:

$$f(1) = p \quad , \quad f(4) = q \quad , \quad f(7) = r$$

نجد أنه تناظر أحادى. وفضلا عن ذلك فإن:

$$f(1 \otimes_9 1) = p \circ p \quad , \quad f(1 \otimes_9 4) = p \circ q \quad , \quad f(1 \otimes_9 7) = p \circ r$$

$$f(4 \otimes_9 1) = q \circ p \quad , \quad f(4 \otimes_9 4) = q \circ q \quad , \quad f(4 \otimes_9 7) = q \circ r$$

$f(7 \otimes_9 1) = r \circ p$, $f(7 \otimes_9 4) = r \circ q$, $f(7 \otimes_9 7) = r \circ r$

أى أن الراسم يحفظ العمليتين. إذن فهو تشاكل. وبذلك نكون قد اثبتنا أن النظام:

o	p	q	r
p	p	q	r
q	q	r	p
r	r	p	q

هو أيضا زمرة إبدالية عنصرها المحايد هو p والعنصران q ، r كل منهما معكوس الآخر. وفضلا عن ذلك فهذه الزمرة دائرة مولداها هما q ، r .

٩-٧ كود التعويض Substitution Code

هب شخصا يريد إيصال رسالة ما مكونة من عدة حروف إلى صديق بدون أن يعرف أحد سوى هذا الصديق فحوى تلك الرسالة. فإنه فى هذه الحالة يلجأ إلى عمل شفره "كود" ويتفق مع هذا الصديق على ذلك الكود.

إذا فرضنا أن حروف الأبجدية هى: A , B , C , ... , Z وعددها 26 حرفا، فإن أبسط كود ممكن هو إبدال كل حرف بالذى يليه وإبدال الحرف الأخير بالحرف A. فمثلا الرسالة:

MISSION DONE

تكتب هكذا:

NJTTJPO EPOF

فإذا أعطينا لكل حرف من حروف الأبجدية عددا ابتداء من العدد 1 فإننا نستطيع أن نعبر عن الكود السابق بالمعادلة:

$x' = x + 1$ (بمقياس 26.)

حيث x يرمز للحرف الأصلى، 'x يرمز للحرف المرسل بدلا منه.

وعيب تلك الطريقة سهولة اكتشاف الكود. لذلك قد يفكر البعض فى عمل كود آخر وفق المعادله:

$$x' = 2x+1 \text{ (بمقياس 26)}$$

أى أن أى حرف موضعه العدد x يستبدل بالحرف الذى موضعه 2x+1 ، وإذا زاد 2x+1 عن 26 فيطرح العدد 26 (أو مضاعفاته). ولكن سنكتشف أن إعادة الرسالة إلى شكلها الأصلى بواسطة المرسل إليه مستحيل حيث أن الحرف المرسل قد يكون له أكثر من نظير واحد فى الرسالة الأصلية فمثلا الحرف المرسل الذى موضعه 3 قد يكون أصله الحرف الذى موضعه 1 أو 14 وأفضل كود بهذه الطريقة هو ما كانت معادلته:

$$x = nx \text{ (بمقياس m)}$$

حيث العددان m ، n أوليان بالنسبة لبعضهما (أى ليس بينهما أى عامل مشترك). وإذا فكرنا فى إضافة بعض العلامات مثل " + " ، "." ، "–" ، ...فإنه يكون لدينا 29 أو 31 أو 37 أو 41 حرفا. المهم أن يكون عدد الحروف أوليا. لذا فالكود:

$$x' = kx \text{ (بمقياس m)}$$

حيث p عدد أولى، هو كود مناسب دائما . وقد يمكن تغيير k من آن لآخر باتفاق بين الصديقين خوفا من اكتشاف الشفرة؛ لذا يستحسن أن يحتفظ كل من الصديقين بجدول يبين الضرب بمقياس p فمثلا جدول الكود:

$$x' = kx \text{ (بمقياس 7)}$$

هو:

$x \rightarrow$, $k \downarrow$

$\otimes_7$	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	1	3	5
3	3	6	2	5	1	4
4	4	1	5	2	6	3
5	5	3	1	6	4	2
6	6	5	4	3	2	1

حيث افترضنا للسهولة أبجدية مكونة من ستة حروف فقط. من السهل استنتاج أن هذا الجدول يمثل زمرة دائرة مولداها 3 ، 5.

مثال

أكتب جدول التعويض المعين بالمعادلة:

$$x' = kx \pmod 5$$

وبيّن أنه يُكوّن زمرة دائرة وأوجد مولديها وزمرها الجزئية.

الحل

جدول التعويض هو:

$x \rightarrow$, $k \downarrow$

$\otimes_5$	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	4	1	3
3	3	1	4	2
4	4	3	2	1

الجدول يمثل زمرة إبدالية دائرة عنصرها المحايد هو 1 ومعكوسات العناصر معطاه بالجدول:

العنصر	1	2	3	4
المعكوس	1	3	2	4

ومولداها هما 2 ، 3. واضح من الجدول أيضا أن $(\{1,3\};\otimes_5)$ زمرة جزئية.

ملحوظة

إذا عرّفنا الراسم $f:\{1,-1,i,-i\}\to\{1,2,3,4\}$ كالآتى:

$$f(1)=1\ ,\ f(-1)=4\ ,\ f(i)=2\ ,\ f(-i)=3$$

نجد أنه تناظر أحادى يحفظ العمليتين $\times$ ، $\otimes_5$ وبذلك يكون النظامان $(\{1,-1,i,-i\};\times)$ ، $(\{1,2,3,4\};\otimes_5)$ متشاكلان، وبذلك نستطيع استنتاج جميع الخواص المطلوبة.

تمريـــــن (٧)

١. أثبت أن النظام $(R;\times)$ حيث $\times$ عملية الضرب هو زمرة إبدالية.

٢. لتكن $X=R-\{1\}$ ولتكن العملية "$*$" معرفة على X كالآتى:

$$x*y=x+y-xy$$

أثبت أن النظام $(X;*)$ زمرة إبدالية وحل المعادلة:

$$2*x=3$$

فى هذا النظام.

٣. أثبت أن النظام $(\{1,3,5,7\} ; \otimes_8)$ زمرة إبدالية وأوجد زمرها الجزئية.

٤. إذا كانت $(A ; o)$ زمرة وكان:

$$(a \circ b)^{-1} = a^{-1} \circ b^{-1} \quad \forall a,b \in A$$

فاثبت أن الزمرة $(A ; o)$ إبدالية.

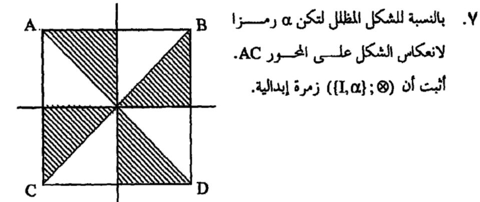
٥. إذا كانت العملية "$*$" معرفة على مجموعة الأعداد النسبية Q كما يلى:

$$(a * b) = a - b + ab \quad \forall a,b \in Q$$

فاثبت أن النظام $(Q ; *)$ ليس إبداليا أو دامجا.

٦. إذا كانت α ترمز لدوران المربع حول مركزه زاوية 90° ضد عقارب الساعة فاثبت أن المجموعة $\{I, \alpha, \alpha^2, \alpha^3\}$ تكون بالنسبة لعملية تحصيل الدورانات زمره إبدالية دائرة مولدها α.

٧. بالنسبة للشكل المظلل لتكن α رمزا لانعكاس الشكل على المحور AC.
أثبت أن $(\{I, \alpha\} ; \otimes)$ زمرة إبدالية.



٨. بالنسبة للشكل المظلل لتكن p ، q ، r
هى الانعكاس على المحاور OA ، OB،
OC على الترتيب ؛ ولتكن ω ترمز

لدوران الشكل حول O زاوية قياسها 120° ضد عقارب الساعة. أثبـــت أن النظام $(T ; \otimes)$ حيث $T = (I , \omega , \omega^2 , p , q , r)$، $\otimes$عمليـــة تحصيـــل التحويلات هو زمرة دائرة غير إبدالية.

٩. أكتب جدول التعويض المعرف بالمعادلة $x' = 4x \pmod 6$ واثبـــت أنـــه لا يكون زمرة.

١٠. إذا كانت $(A ; o)$ زمرة وكان $(a \; o \; b)^2 = a^2 \; o \; b^2$ فاثبت أن الزمرة تكون إبدالية.

تنفيذ
خلود للدعاية والاعلان
ت: ٤١٩٦٢٢٢(٢٠٢)

مبادئ رياضيات الحاسب

تأليف / أ.د. على نصر السيد الوكيل

هذا الكتاب

إن الحاسب الإلكترونى الذى أصبح لا يستغنى عنه أحد فى عصر المعلومات قد أفاد ـ ربما أكثر من غيره من المخترعات ـ من الرياضيات المعاصرة: فدوائره المنطقية فى معالجه المركزى الذى هو بمثابة مخ الحاسب تعتمد أساساً على المنطق الرياضى ونظرية المجموعات، والشفرة التى عن طريقها يتعرف الحاسب على الحروف والأرقام والرموز تعتمد على النظام الثنائى للأعداد. أما مزاياه الفريدة فى البحث عن الأشكال والأنماط وتعديلها واستنساخها واكتشاف الأخطاء فى الأجهزة والبرمجيات فأساسها العلاقات والرواسم والأنظمة الرياضية ذات العمليات.

لذا فإن أراد الدارس لعلوم الحاسب تفهم ما يجرى بتلك الآلة العجيبة ولا يكون مجرد مستفيد من إمكاناتها التقنية العالية فلا غنى له عن دراسة تلك الموضوعات.

IHCI

TIONAL HOUSE FOR CULTURAL INVESTMENTS

CAIRO - EGYPT

ISBN : 977-282-082-x